

Zur Aggregation von bedingten Treatmenteffekten in der logistischen Regression: Eine Shiny Application

Bachelorarbeit

Bachelor of Science Psychologie

eingereicht von

Matthias Gehlert

Lehrstuhl für Methodenlehre und Evaluationsforschung

Institut für Psychologie

Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Zusammenfassung

In vielen Bereichen der angewandten Wissenschaften werden Behandlungen entwickelt, durchgeführt und evaluiert. Bei binärer Kodierung der abhängigen Variable und der Behandlungsvariable können bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(Y=1|X)$ über den Erfolg der Behandlung betrachtet werden. Diese sind nicht immer kausal interpretierbar. Die abhängige Variable hängt oftmals von mehr als einer unabhängigen Variable ab; auch in der Form, dass unterschiedliche Behandlungseffekte für unterschiedliche Personen vorliegen können. Bei der Aggregation zu einem durchschnittlichen Treatmenteffekt müssen diese unterschiedlichen Behandlungseffekte korrekt berücksichtigt werden. Dazu werden drei Aggregationsverfahren (SME, MEM, ADJ) hinsichtlich ihrer kausalen Interpretierbarkeit diskutiert. Eine interaktive, englischsprachige Webanwendung (Aggregation[0,1]Xplorer) ermöglicht unter anderem die spielerische Exploration der Problematik.

Stichwörter: *Aggregation, Behandlungseffekte, Kausalität, Logistische Regression, R*

Vorwort

Das Werk hätte nicht ohne den Rückhalt des Lehrstuhls für Methodenlehre und Evaluationsforschung der Friedrich-Schiller-Universität Jena entstehen können. Besonders möchte ich hierbei *Herrn Prof. Dr. Rolf Steyer* und *Herrn Adrian Jusepeitis M.Sc.* für ihre Geduld und kontinuierliche Unterstützung danken. Die Hinweise von Nutzern der Internetplattform *stackexchange.com* haben zur Verbesserung des gesamten Quellcodes beigetragen.

Bei meinen Ausführungen beziehe ich mich in den statistischen Grundlagen überwiegend auf Steyer und Nagel (2017) und folge auch weitgehend deren mathematischen Notationen.

Grundlegende Voraussetzungen zum Verständnis der Inhalte sind an entsprechender Stelle erläutert und ggf. mit ergänzenden Literaturhinweisen versehen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Einführung	1
2 Theoretischer Hintergrund	3
3 Logistische Regression	6
4 Aggregation[0,1]Xplorer	7
4.1 Festlegung der Wahrscheinlichkeiten	7
4.1.1 Festlegung der Behandlungswahrscheinlichkeiten	7
4.1.2 Festlegung der Erfolgswahrscheinlichkeiten	8
4.2 Effektaggregation	9
4.2.1 Einfache Marginale Effekte	9
4.2.2 Marginale Effekte am Mittelwert	11
4.2.3 Adjustierte Marginale Effekte	12
4.2.4 Beispiel	14
4.3 Benutzerhinweise	15
4.3.1 Voraussetzungen	16
4.3.2 Benutzeroberfläche	16
5 Diskussion	18
A Literaturverzeichnis	ix
B Software	xi
C Quellcode	xii

1 Einführung

In unserem Alltag sind wir umgeben von Zufallsgeschehen. Das Ergebnis eines Würfelwurfes oder eines nicht-manipulierten Glücksspieles kann nicht unmittelbar vorausgesagt werden (Gigerenzer, Swijtink & Porter, 1999). Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts formalisierte Kolmogorow (1933, 1956) die Konzepte der Wahrscheinlichkeitstheorie als Spezialfall der Maßtheorie: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist ein endliches Maß, Zufallsvariablen sind messbare Abbildungen und Erwartungswerte von Zufallsvariablen sind Integrale einer messbaren Abbildung bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes (siehe Steyer & Nagel, 2017). Damit können Aussagen über zufällige Vorgänge in einer, für die Mathematik unerlässlich, klaren Sprache getroffen werden.

Nur welche Bedeutung kommt Wahrscheinlichkeiten neben den klassischen Lehrbuchbeispielen überhaupt zu? In den Medien wird derzeit über Stickstoffdioxidgrenzwerte und den richtigen Einsatz von Messstationen debattiert (Frahm, 2019). Die schädliche Wirkung für den Menschen hängt von vielen Faktoren ab und kann letztlich nur in Termini bedingter Wahrscheinlichkeiten angegeben werden. Nach der Veröffentlichung sensibler Daten von Personen des öffentlichen Lebens steht außerdem der zuverlässige Schutz von persönlichen Daten im medialen Mittelpunkt (Beuth, Böhm, Peteranderl & Pauly, 2019). Die Gefahr eines Fremdzugriffes hängt unter anderem vom Nutzerverhalten ab. Die Passwortstärke kann basierend auf der Entropie ermittelt werden. Hierbei sind ebenfalls bestimmte Wahrscheinlichkeiten bedeutsam.

Aber auch in anderen Situationen gibt es entscheidende Fragen: Wie wirksam ist ein innovatives Verfahren der künstlichen Befruchtung oder wie zuverlässig ist ein neues Medikament? Das heißt, wie kann eine Aussage über die Güte eines neuen Verfahrens/Produktes getroffen werden, um so die beste Entscheidung (für z.B. einen Markteintritt) zu fällen?

Die abhängige Variable (Zielgröße) wird bei solchen Fragestellungen oft binär kodiert (Erfolg und Misserfolg) und dann in Abhängigkeit einer ebenfalls binären unabhängigen Variable (Behandlung und Kontrollbedingung) untersucht. Damit betrachten wir die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X)$, eine Zufallsvariable, deren Werte die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Y=1|X=x)$ sind (siehe Steyer & Nagel, 2017). Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten können Aussagen über den Erfolg (d.h. eine komplikationsfreie Besserung) in Abhängigkeit der Behandlung (d.h. eines neuen oder alten Medikamentes) formuliert werden.

Doch nicht immer lassen sich diese bedingten Wahrscheinlichkeiten kausal interpretieren. Die Angabe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen eines kausalen Zusammenhanges ist „mit deutlich mehr Schwierigkeiten verbunden, als man angesichts unseres im Alltag oft problemlosen Umganges mit kausalen Abhängigkeiten zunächst erwarten könnte.“ (Kersten & Rose, 2007, S. 5). Die abhängige Variable hängt meist von mehr als einer unabhängigen Variable ab. Das können zum Beispiel interindividuelle Unterschiede der Patienten sein, die die Wirkung des Medikamentes modifizieren; sodass unterschiedliche Behandlungseffekte (treatment effects) für unterschiedliche Personen vorliegen.

Werden diese unterschiedlichen Behandlungseffekte bei der Aggregation (siehe Abschnitt 4.2) unzureichend berücksichtigt, kann das schnell zu falschen kausalen Aussagen und sogar einer Effekturnkehr führen: Das heißt, einem vermeintlich positiven Effekt, demzufolge das neue Medikament besser wirkt als das Vergleichsprodukt, steht in der Wirklichkeit ein negativer Effekt gegenüber; das neue Medikament wirkt schlechter als das Vergleichsprodukt (siehe Abschnitt 4.2.4).

Effekte können dabei auf verschiedenen Skalen ausgedrückt werden, zum Beispiel der Wahrscheinlichkeitsskala (eigentlich: Wahrscheinlichkeitsdifferenzskala), der Odds-Ratio-Skala oder der Log-Odds-Ratio-Skala. Die beiden letztgenannten Möglichkeiten sind allerdings nur eine Umrechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten. Sind diese verfälscht (d.h. ist die Wahrscheinlichkeitsskala verfälscht), dann sind es auch andere Effektgrößen, die in der Literatur oftmals verwendet werden. Das kann teils gravierende Auswirkungen (siehe Abschnitt 5) haben.

Die vorliegende Arbeit möchte daher im theoretischen Hintergrund zunächst ein allgemeines Szenario (d.h. unabhängig von inhaltlichen Interpretationen) schaffen und die oben genannten Begriffe ordnen. Dazu wird in aller Kürze die Kausalitätstheorie (siehe z.B. Steyer, 2018) und der richtige Umgang mit Kovariaten angerissen. Anschließend wird die logistische Regression kurz vorgestellt. Im Mittelpunkt steht dann der *Aggregation[0,1]Xplorer*, eine interaktive Webanwendung (siehe Abschnitt 4). Mit dieser Anwendung wird eine spielerische Exploration der Aggregation von bedingten Behandlungseffekten in der logistischen Regression ermöglicht. Dazu werden drei Aggregationsverfahren dargestellt, wobei nur eines davon korrekt ist. Die Relevanz der Problematik wird anschließend an einem Beispiel verdeutlicht und in die bestehende Literatur eingeordnet.

2 Theoretischer Hintergrund

Die Veränderung von Attributen ist ein zentrales Gebiet der meisten angewandten Wissenschaften. Aus diesem Grund werden Behandlungen entwickelt und durchgeführt. Das können je nach Disziplin zum Beispiel eine psychologische Therapie, ein medizinischer Eingriff oder ein neues Produkt sein. Zur Evaluation dieser Behandlungen sind in der Literatur verschiedene Methoden bekannt. Die folgenden Ausführungen lehnen sich stark an Sengewald (2018, S. 6 ff.) an. Eine detaillierte Einführung zu latenten Variablen findet sich bei Steyer, Mayer, Geiser und Cole (2015) oder Sengewald (2018).

Randomisiertes Experiment. Der Königsweg zur Evaluation einer Behandlung (treatment) im Vergleich zu einer Kontrollbedingung (control condition) ist ein richtig angewendetes randomisiertes Experiment (randomized clinical trial). Die Probanden können die Behandlung dabei nicht selbst wählen, sondern werden mit einer Wahrscheinlichkeit $P(X=1)$ behandelt. In diesem Fall entspricht die Differenz zwischen dem Erwartungswert der Behandlung und dem Erwartungswert der Kontrollbedingung dem unverfälschten durchschnittlichen Behandlungseffekt (average treatment effect, ATE).

Nicht-randomisiertes Experiment. Ein solches randomisiertes Experiment ist jedoch, zum Beispiel bei der Evaluation eines neuen Medikamentes, ethisch kaum vertretbar. Bei anderen Untersuchungen spielen wirtschaftliche und organisatorische Faktoren eine Rolle. Studienautoren vertrauen daher häufig auf nicht-randomisierte Experimente (auch: Quasi-Experimente). In diesem Szenario ist die Beachtung von Kovariaten wichtig für die Analyse von kausalen Effekten. Denn hier sind systematische Unterschiede vor der Behandlung möglich (baseline differences), die ggf. Einfluss auf das Ergebnis haben. Eine nicht-adjustierte Differenz zwischen dem Erwartungswert der Behandlung und dem Erwartungswert der Kontrollbedingung entspricht so normalerweise einem verfälschten ATE. Eine mögliche Lösung ist die Verwendung von adjustierten Erwartungswerten.

Zufallsexperiment. Es wird ein mehrstufiges Zufallsexperiment (single-unit trial) betrachtet.¹

1. Ein Individuum u wird aus einer Menge Ω_U von Individuen gezogen.

¹Das Zufallsexperiment kann erweitert werden, um ein komplexeres Studiendesign darzustellen. So können zum Beispiel zusätzliche Messzeitpunkte berücksichtigt werden (siehe Steyer, 2018).

2. Die Werte z_1, z_2, \dots, z_m einer (multivariaten) messfehlerbehafteten Pretreatment-Variable Z_{all} (d.h. einer oder mehrerer Variablen, die vor der Behandlung gemessen werden können) wird beobachtet.²
3. Das Individuum erhält (random assignment) oder wählt (self-selection) eine von zwei Behandlungen, dargestellt durch die Werte x der binären Behandlungsvariable X (binary treatment variable).
4. Ein Wert y einer Ergebnisvariable Y (response variable) wird beobachtet.

True-Outcome-Variablen. In diesem Zufallsexperiment können die True-Outcome-Variablen

$$\tau_0 := E^{X=0}(Y|U, Z_{all}) \quad \text{und} \quad \tau_1 := E^{X=1}(Y|U, Z_{all}) \quad (2.1)$$

betrachtet werden. Das sind die (U, Z_{all}) -bedingten Erwartungen von Y bezüglich des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes $P^{X=0}$ und $P^{X=1}$ (Steyer & Nagel, 2017, S. 412 ff.).

True-Total-Effect-Variable. Die True-Outcome-Variablen können zur Definition von kausalen Effekten verwendet werden. Die Differenz $\delta_{10} := \tau_1 - \tau_0$ wird dabei als True-Total-Effect-Variable bezeichnet.

Durchschnittlicher Behandlungseffekt. Der Erwartungswert dieser Variable δ_{10} ist

$$ATE := E(\delta_{10}) = E(\tau_1 - \tau_0) = E(\tau_1) - E(\tau_0) = E[E^{X=1}(Y|U, Z_{all})] - E[E^{X=0}(Y|U, Z_{all})]. \quad (2.2)$$

Damit ist der ATE³ der durchschnittliche Effekt der Behandlung im Vergleich zu der Kontrollbedingung, wobei die Erwartung über die gemeinsame Verteilung (joint distribution) von U und Z_{all} gebildet wird; also nicht über die $(X=0)$ - bzw. $(X=1)$ -bedingte gemeinsame Verteilung von U und Z_{all} .

Unverfälschtheit der unbedingten Erwartung. Die unbedingte Erwartung $E^{X=x}(Y)$ ist unverfälscht, wenn gilt:

$$E^{X=x}(Y) = E(\tau_x), \quad \text{für } x = 0, 1. \quad (2.3)$$

²Aus Gründen der Einfachheit wird angenommen, dass Z_{all} nur aus einer Pretreatment-Variable besteht.

³Auf eine gesonderte Notation ATE_{10} , die in der Literatur häufig zur Verdeutlichung der binären Kodierung der Behandlungsvariable verwendet wird, wird verzichtet. In dieser Bachelorarbeit handelt es sich ausschließlich um eine binäre Treatmentvariable.

Der ATE kann dann wie folgt identifiziert werden:

$$E^{X=1}(Y) - E^{X=0}(Y) = E(\tau_1) - E(\tau_0) = ATE. \quad (2.4)$$

Die hierbei in Gleichung (2.3) angenommene Unverfälschtheit der bedingten Erwartungswerte $E^{X=x}(Y)$ folgt zum Beispiel aus den folgenden Bedingungen (siehe Steyer, 2018):

- i. Unabhängigkeit von X und (U, Z_{all}) : $P(X=1|U, Z_{all}) = P(X=1)$,
- ii. Vollständigkeit der Regression $E^{X=x}(Y)$: $E^{X=x}(Y|U, Z_{all}) = E^{X=x}(Y)$, für $x = 0, 1$.

Unverfälschtheit der bedingten Erwartung. Eine Kovariate $Z = f(U, Z_{all})$ kann so gewählt sein, dass die bedingte Erwartung $E^{X=x}(Y|Z)$ unverfälscht ist, das heißt

$$E^{X=x}(Y|Z) = E(\tau_x|Z), \quad \text{für } x = 0, 1. \quad (2.5)$$

Der ATE kann dann durch Adjustierung der Kovariate Z identifiziert werden, sodass gilt (siehe Steyer & Nagel, 2017, Box 10.2 iv)),

$$E[E^{X=1}(Y|Z)] - E[E^{X=0}(Y|Z)] = E[E(\tau_1|Z)] - E[E(\tau_0|Z)] = E(\tau_1) - E(\tau_0) = ATE. \quad (2.6)$$

$E[E^{X=x}(Y|Z)]$ wird als Z -adjustierter bedingter Erwartungswert von Y gegeben $X=x$ bezeichnet. Die hierbei in Gleichung (2.5) angenommene Unverfälschtheit der bedingten Erwartung $E^{X=x}(Y|Z)$ folgt zum Beispiel aus den folgenden Bedingungen (siehe Steyer, 2018):

- i. (Z_a) -bedingte Unabhängigkeit von X und (U, Z_{all}) :

$$P(X=1|U, Z_{all}) = P(X=1|Z_a), \quad \text{wobei } Z_a = f_a(U, Z_{all}),$$

- ii. Vollständigkeit der Regression $E^{X=x}(Y|Z_b)$:

$$E^{X=x}(Y|U, Z_{all}) = E^{X=x}(Y|Z_b), \quad \text{für } x = 0, 1, \quad \text{wobei } Z_b = f_b(U, Z_{all}).$$

Aus Gründen der Einfachheit nimmt Z in den folgenden Ausführungen jeweils die Rolle von Z_a oder Z_b ein.

3 Logistische Regression

Bei einer binären abhängigen Variable ist der bedingte Erwartungswert $E^{X=x}(Y)$ identisch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P^{X=x}(Y=1)$ und die bedingte Erwartung $E^{X=x}(Y|Z)$ identisch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P^{X=x}(Y=1|Z)$ (Steyer & Nagel, 2017, Remark 10.4). Diese (bedingten) Wahrscheinlichkeiten können somit unter Umständen mittels einer logistischen Regression beschrieben werden.

Relevanz. Logistische Regressionsanalysen haben nach Peng, Lee und Ingersoll (2002) eine hohe wissenschaftliche Relevanz und erfreuen sich in den letzten Jahren zunehmender Popularität. Es gibt zahlreiche Anwendungsbeispiele: So liefert eine Stichwortsuche nach *logistic regression* in vielen Datenbanken (z.B. PsycINFO) lange Resultatslisten.

Logit-Transformation. Von zentraler Bedeutung in der logistischen Regression ist die Logit-Transformation $\text{logit}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right), \quad \forall p \in (0,1). \quad (3.1)$$

Das ermöglicht die Abbildung eines auf das Intervall $(0,1)$ beschränkten Wertebereiches auf einen unbeschränkten Wertebereich.

Logistische Funktion. Die logistische Funktion⁴ mit $\text{expit}: \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ ist die Inverse des logit mit

$$\text{expit}(x) = \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Das ermöglicht die Abbildung eines unbeschränkten Wertebereiches auf einen auf das Intervall $(0,1)$ beschränkten Wertebereich.

Skalen. Eine (bedingte) Wahrscheinlichkeit kann so zweifach angegeben werden:

- i. Auf der Wahrscheinlichkeitsskala (probability scale) mit Werten zwischen 0 und 1 sowie
- ii. der Log-Odds-Skala (log odds scale) mit Werten zwischen $-\infty$ und ∞ .

⁴Eine grafische Darstellung der Sigmoidfunktion für die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten $P(X=1|Z)$ und $P^{X=x}(Y=1|Z)$ ist im Aggregation [0,1] Explorer (siehe Abschnitt 4) enthalten.

4 Aggregation[0,1]Xplorer

Der interaktive, englischsprachige Aggregation[0,1]Xplorer for binary response variable betrachtet die Aggregation von bedingten Behandlungseffekten (siehe Abschnitt 2) in der logistischen Regression (siehe Abschnitt 3). Das heißt, es kann der Effekt einer binären Behandlungsvariable auf eine binäre Ergebnisvariable unter Aggregation der bedingten Effekte gegeben einer Kovariate studiert werden.

4.1 Festlegung der Wahrscheinlichkeiten

Dazu müssen die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Y=1|Z=z, X=x)$ und $P(X=1|Z=z)$ durch die Verteilung der Zufallsvariablen, die Beschreibung mit einer logistischen Regression und dementsprechende Modellparameter festgelegt werden.

4.1.1 Festlegung der Behandlungswahrscheinlichkeiten

Die binäre Behandlungsvariable X folgt einer Bernoulli-Verteilung (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 8.3) mit $p = P(X=1|Z)$. Die Kovariate Z ist normalverteilt (siehe Steyer & Nagel, 2017, Definition 8.30) mit

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Es wird angenommen, dass die Z -bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X=1|Z)$ durch eine logistische Regression beschrieben und linear-logistisch parametrisiert werden kann (siehe Steyer & Nagel, 2017, Theorem 13.14). Das heißt,

$$P(X=1|Z) = \frac{\exp(\kappa_0 + \kappa_1 \cdot Z)}{1 + \exp(\kappa_0 + \kappa_1 \cdot Z)}. \quad (4.2)$$

Unabhängigkeiten. Falls Gleichung (4.2) mit $\kappa_1 = 0$ gilt, so liegt eine stochastische Unabhängigkeit von X und Z [d.h. $P(X=1|Z) = P(X=1)$] vor. Dementsprechend impliziert $\kappa_1 \neq 0$ unter Gültigkeit von Gleichung (4.2) eine stochastische Abhängigkeit von X und Z [d.h. $P(X=1|Z) \neq P(X=1)$].

4.1.2 Festlegung der Erfolgswahrscheinlichkeiten

Die binäre Ergebnisvariable Y folgt ebenfalls einer Bernoulli-Verteilung (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 8.3) mit $p = P(Y=1|X, Z)$. Es wird daher angenommen, dass die X -bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X)$ und die (X, Z) -bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X, Z)$ ebenfalls durch eine logistische Regression beschrieben werden können. Da X binär ist, gilt nach Steyer und Nagel (2017, Theorem 13.14) sowohl

$$P(Y=1|X) = \beta_0 + \beta_1 \cdot X \quad (4.3)$$

als auch

$$P(Y=1|X) = \frac{\exp(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot X)}{1 + \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot X)}. \quad (4.4)$$

Da X binär ist, gelten nach Steyer und Nagel (2017, Remark 15.25) weiterhin

$$P(Y=1|X, Z) = g_0(Z) + g_1(Z) \cdot X \quad (4.5)$$

$$P(Y=1|X, Z) = \frac{\exp(f_0(Z) + f_1(Z) \cdot X)}{1 + \exp(f_0(Z) + f_1(Z) \cdot X)} \quad (4.6)$$

als lineare bzw. linear-logistische Parametrisierungen.

Effektfunktionen. Die (X, Z) -bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X, Z)$ wird so mit einer logistischen Achsenabschnittsfunktion $f_0(Z)$ (logit intercept function) und einer logistischen Effektfunktion $f_1(Z)$ (logit effect function) parametrisiert. Nach Steyer und Nagel (2017, Remark 15.32) entspricht $f_1(Z)$ der Log Odds Ratio (Funktion) $\log OR(Z)$. Unter Annahme der Linearität dieser Funktionen gilt außerdem

$$\begin{aligned} f_0(Z) &= \lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot Z \\ f_1(Z) &= \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot Z. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Damit kann die Achsenabschnittsfunktion $g_0(Z)$ (intercept function) und die Effektfunktion $g_1(Z)$ (effect function) in Gleichung (4.5) mittels der logistischen Regressionsparameter berechnet werden (siehe Steyer & Nagel, 2017, Theorem 15.25). Das heißt,

$$\begin{aligned} g_0(Z) &= \frac{\exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot Z)}{1 + \exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot Z)} \\ g_1(Z) &= \frac{\exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot Z + \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot Z)}{1 + \exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot Z + \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot Z)} - \frac{\exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot Z)}{1 + \exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot Z)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2 Effektaggregation

Basierend auf die Abschnitte 4.1.1 und 4.1.2 können nun Aussagen über die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten $P(Y=1|X=1, Z=z)$ und $P(Y=1|X=0, Z=z)$ bei bekannter Ausprägung z von Z getroffen werden; wobei nach Gleichungen (4.6) und (4.7) gilt,

$$\begin{aligned} P(Y=1|X=0, Z=z) &= \frac{\exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot z)}{1 + \exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot z)} \\ P(Y=1|X=1, Z=z) &= \frac{\exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot z + \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot z)}{1 + \exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot z + \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot z)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die entstehenden Werte sind zum Beispiel zur optimalen Vorhersage der Medikamentenwirkung bei einem spezifischen Patienten hilfreich und so für den behandelnden Mediziner oder Psychologen interessant.

Aggregation. Der Wert z der Kovariate Z ist aber nicht immer bekannt und so besteht das Interesse stattdessen an einer Aggregation (d.h. der Angabe eines durchschnittlichen Effektes). Das kann hilfreich für die Entscheidung der Kostenträger über ein neues Medikament oder eine neue psychologische Therapie sein.

Aggregationsverfahren. In der Literatur werden verschiedene Formen der Marginalen Effekte (unbedingte Effekte) zur Aggregation der ($Z=z$)-bedingten Effekte bei einer Kovariate Z , einer binären Behandlungsvariable und einer binären Ergebnisvariable erwähnt (siehe Muller & MacLehose, 2014). Der Aggregation[0,1]Xplorer berücksichtigt daran angelehnt drei unterschiedliche Aggregationsverfahren bedingter Effekte:

- i. Einfache Marginale Effekte (simple marginal effects, SME),
- ii. Marginale Effekte am Mittelwert (marginal effects at the mean, MEM) und
- iii. Adjustierte Marginale Effekte (adjusted marginal effects, ADJ).

4.2.1 Einfache Marginale Effekte

Der SME wird basierend auf der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X)$ berechnet. Genau genommen ist das Verfahren damit keine Aggregation der bedingten Effekte. Die Kovariate Z wird einfach ignoriert.

Effektmaße. Dieses Prinzip kann zur Berechnung von aggregierten Effekten auf der Wahrscheinlichkeitsskala (eigentlich: Wahrscheinlichkeitsdifferenzenskala) mit

$$\beta_1 = P(Y=1|X=1) - P(Y=1|X=0), \quad (4.10)$$

der Odds-Ratio-Skala (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 13.17) mit

$$OR_{SME} = \frac{P(Y=1|X=1)}{1 - P(Y=1|X=1)} \bigg/ \frac{P(Y=1|X=0)}{1 - P(Y=1|X=0)} \quad (4.11)$$

oder der Log-Odds-Ratio-Skala (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 13.16) mit

$$\log OR_{SME} = \ln(OR_{SME}) \quad (4.12)$$

verwendet werden.

Kausale Unverfälschtheit. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten und alle darauf basierenden Effektmaße sind nach Abschnitt 2 kausal unverfälscht, wenn $P(Y=1|X=x)$ unverfälscht ist; das heißt, falls Gleichung (2.3) gilt. Diese Gleichung gilt zum Beispiel dann, wenn eine stochastische Unabhängigkeit der unabhängigen Variablen X und Z nach Punkt i. (Abschnitt 2) vorliegt. Damit führt ein (richtig angewendetes) randomisiertes Experiment zu einer Unverfälschtheit der in den Gleichungen (4.10) bis (4.12) aufgeführten Effekte.

Berechnungen. Es müssen die (X, Z) -bedingten Wahrscheinlichkeiten in X -bedingte Wahrscheinlichkeiten umgerechnet werden. Dabei gelten,

$$\begin{aligned} P(Y=1|X=0) &= \int P(Y=1|X=0, Z=z) f_{Z|X=0}(z) dz \\ P(Y=1|X=1) &= \int P(Y=1|X=1, Z=z) f_{Z|X=1}(z) dz \end{aligned} \quad (4.13)$$

nach Steyer und Nagel (2017, Lemma 17.73). Die bedingten Dichten $f_{Z|X=0}$ und $f_{Z|X=1}$ können nach Süsse (2018, S. 3) durch

$$\begin{aligned} f_{Z|X=0} &= \frac{f_Z}{1 - P(X=1)} \frac{1}{1 + \exp(\kappa_0 + \kappa_1 \cdot Z)} \\ &= \frac{f_Z}{1 - P(X=1)} \text{expit} [-(\kappa_0 + \kappa_1 \cdot Z)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

und

$$\begin{aligned} f_{Z|X=1} &= \frac{f_Z}{P(X=1)} \frac{\exp(\kappa_0 + \kappa_1 \cdot Z)}{1 + \exp(\kappa_0 + \kappa_1 \cdot Z)} \\ &= \frac{f_Z}{P(X=1)} \text{expit}(\kappa_0 + \kappa_1 \cdot Z) \end{aligned} \quad (4.15)$$

errechnet werden, wobei nach Steyer und Nagel (2017, Theorem 6.11) gilt

$$P(X=1) = \int P(X=1|Z=z) f_Z(z) dz. \quad (4.16)$$

Dabei ist f_Z die (unbedingte) Dichte von Z (siehe Gleichung (4.1)).

4.2.2 Marginale Effekte am Mittelwert

Der MEM wird basierend auf der (X, Z) -bedingten Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X, Z)$ berechnet, wobei für Z ein spezifischer Wert (z.B. der Erwartungswert μ_Z) angenommen wird. Das entspricht einer Aggregation auf der Log-Odds-Skala, denn

$$E[f_1(Z)] = E(\lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot Z) = \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot E(Z). \quad (4.17)$$

Für die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten gelten also:

$$\begin{aligned} P(Y=1|X=0, Z=\mu_Z) &= \frac{\exp[f_0(\mu_Z)]}{1 + \exp[f_0(\mu_Z)]} \\ &= \frac{\exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot \mu_Z)}{1 + \exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot \mu_Z)} \\ P(Y=1|X=1, Z=\mu_Z) &= \frac{\exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot \mu_Z + \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot \mu_Z)}{1 + \exp(\lambda_{00} + \lambda_{01} \cdot \mu_Z + \lambda_{10} + \lambda_{11} \cdot \mu_Z)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Effektmaße. Dieses Aggregationsprinzip kann ebenfalls zur Berechnung von aggregierten Effekten auf der Wahrscheinlichkeitsskala (eigentlich: Wahrscheinlichkeitsdifferenzenskala) mit

$$g_1(\mu_Z) = P(Y=1|X=1, Z=\mu_Z) - P(Y=1|X=0, Z=\mu_Z), \quad (4.19)$$

der Odds-Ratio-Skala (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 13.17) mit

$$OR_{MEM} = \frac{P(Y=1|X=1, Z=\mu_Z)}{1 - P(Y=1|X=1, Z=\mu_Z)} \bigg/ \frac{P(Y=1|X=0, Z=\mu_Z)}{1 - P(Y=1|X=0, Z=\mu_Z)} \quad (4.20)$$

oder der Log-Odds-Ratio-Skala (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 13.16) mit

$$\log OR_{MEM} = \ln(OR_{MEM}) \quad (4.21)$$

verwendet werden.

Kausale Unverfälschtheit. Die in den Gleichungen (4.19) bis (4.21) aufgeführten Parameter geben selbst dann keine durchschnittlichen kausalen Effekte an, falls $P(Y=1|X)$ und $P(Y=1|X, Z)$ unverfälscht sind, wie dies zum Beispiel im randomisierten Experiment der Fall ist (siehe Abschnitt 2). Wegen der Logit-Transformation gilt,

$$P(Y=1|X=x, Z=\mu_Z) \neq E[P(Y=1|X=x, Z)], \quad \text{für } x = 0, 1. \quad (4.22)$$

Bei Unabhängigkeit von X und Z , die im randomisierten Experiment hergestellt wird, gilt außerdem

$$E[P(Y=1|X=x, Z)] = P(Y=1|X=x), \quad \text{für } x = 0, 1. \quad (4.23)$$

Da bei Unabhängigkeit von X und Z die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X=x)$ unverfälscht ist, zeigt Gleichung (4.23), dass nur $E[P(Y=1|X=x, Z)]$ die richtige, kausal interpretierbare Aggregation ist.

4.2.3 Adjustierte Marginale Effekte

Der ADJ wird basierend auf der (X, Z) -bedingten Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X, Z)$ berechnet, wobei Z -adjustierte Erwartungen $E[P(Y=1|X=x, Z)]$ gebildet werden. Dies ist eine Aggregation auf der Wahrscheinlichkeitsskala. Es gelten nach Steyer und Nagel (2017, Theorem 6.13),

$$\begin{aligned} E[P(Y=1|X=0, Z)] &= \int P(Y=1|X=0, Z=z) f_Z(z) dz \\ E[P(Y=1|X=1, Z)] &= \int P(Y=1|X=1, Z=z) f_Z(z) dz. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Effektmaße. Das Aggregationsprinzip kann wiederum zur Berechnung von aggregierten Effekten auf der Wahrscheinlichkeitsskala (eigentlich: Wahrscheinlichkeitsdifferenzenskala) mit

$$E[g_1(Z)] = E[P(Y=1|X=1, Z)] - E[P(Y=1|X=0, Z)], \quad (4.25)$$

der Odds-Ratio-Skala (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 13.17) mit

$$OR_{ADJ} = \frac{E[P(Y=1|X=1, Z)]}{1 - E[P(Y=1|X=1, Z)]} \bigg/ \frac{E[P(Y=1|X=0, Z)]}{1 - E[P(Y=1|X=0, Z)]} \quad (4.26)$$

oder der Log-Odds-Ratio-Skala (siehe Steyer & Nagel, 2017, Remark 13.16) mit

$$\log OR_{ADJ} = \ln(OR_{ADJ}) \quad (4.27)$$

verwendet werden.

Kausale Unverfälschtheit. Die so Z-adjustierte bedingte Erwartung $E[P(Y=1|X=x, Z)]$ und alle darauf basierenden Effektmaße sind kausal unverfälscht, falls $P(Y=1|X=x, Z)$ unverfälscht ist; das heißt, wenn Gleichung (2.5) gilt. Eine stochastische Abhängigkeit der unabhängigen Variablen X und Z [d.h. $P(X=1|Z) \neq P(X=1)$] hat demnach keinen Einfluss auf die Unverfälschtheit der in den Gleichungen (4.25) bis (4.27) aufgeführten Effekte und wird nicht vorausgesetzt.

Äquivalenz mit SME im randomisierten Experiment. Unter Voraussetzung der Gültigkeit der Gleichungen (2.3) und (2.5) nach Abschnitt 2 (z.B. einer Unabhängigkeit von X und Z) gilt

$$E^{X=x}(Y) = E[E^{X=x}(Y|Z)] = E(\tau_x). \quad (4.28)$$

Das wird mit den Rechenregeln der bedingten Erwartung (siehe Steyer & Nagel, 2017, Box 10.2 vi)) so erklärt:

$$\begin{aligned} E(Y|X) &= E[E(Y|X, Z)|X] \\ &= E[g_0(Z) + g_1(Z) \cdot X|X] \\ &= E[g_0(Z)|X] + E[g_1(Z)|X] \cdot X \\ &= E[g_0(Z)] + E[g_1(Z)] \cdot X, \quad \text{falls } X \perp\!\!\!\perp Z \\ &= \beta_0 + \beta_1 \cdot X. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Der Erwartungswert der logistischen Effektfunktion $E[g_1(Z)]$ ist somit im randomisierten Experiment identisch mit dem Regressionskoeffizienten β_1 . Eine Berechnung der Einfachen Marginalen Effekte bei Unabhängigkeit von X und Z kann immer zugunsten der Adjustierten Marginalen Effekte vernachlässigt werden, da sie zu identischen Ergebnissen führen.

Tabelle 4.1 Eine Übersicht der fiktiven Modellparameter.

	$X \perp Z$	$\neg(X \perp Z)$
μ	-0.5	-0.5
σ	3	3
κ_0	1	1
κ_1	0	0.5
λ_{00}	-3	-3
λ_{01}	2.5	2.5
λ_{10}	1.25	1.25
λ_{11}	-2.25	-2.25
siehe Gleichungen (4.1), (4.2) und (4.7)		

4.2.4 Beispiel

Die Auswirkungen der verschiedenen Aggregationsverfahren lassen sich an einem fiktiven Beispiel verdeutlichen: Die Wirksamkeit eines neuen Medikamentes wird im Auftrag eines Pharmaherstellers in zwei unabhängigen empirischen Studien ausgewertet. Dafür wird ein randomisiertes und ein nicht-randomisiertes Experiment durchgeführt (siehe Abschnitt 2). Bei der Datenanalyse stehen den Studienautoren die drei vorgestellten Aggregationsverfahren (siehe Abschnitte 4.2.1 bis 4.2.3) zur Auswahl.

Werte. Tabelle 4.1 zeigt die fiktiven Modellparameter⁵. Tabelle 4.2 zeigt die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten und ihre jeweilige Differenz, einen Schätzer des durchschnittlichen Behandlungseffektes.

Interpretationen. Je nach verwendetem Experimentaldesign (RE, N-RE) und Aggregationsverfahren (SME, MEM, ADJ) lassen sich nun unterschiedliche Schlüsse über die Wirksamkeit des neuen Medikamentes ziehen. Die Autoren der ersten Studie (RE) berechnen die Marginalen Effekte am Mittelwert und erhalten mit $g_1(\mu_Z) = 0.119$ einen vermeintlich positiven Effekt. 133 von 1000 Patienten erlangten durch das neue Medikament eine komplikationsfreie Besserung, während es in der Kontrollgruppe nur 14 von 1000 waren. Diese Ergebnis wird durch die Autoren der zweiten Studie (N-RE) repliziert. Sie wählen die Einfachen Marginalen Effekte zur Auswertung und erhalten in ihrer Studie mit $\beta_1 = 0.113$ ebenfalls einen vermeintlich positiven Effekt. Hier erlangten 189 von

⁵Diese Werte können im Aggregation[0,1]Xplorer als ein vordefiniertes Beispiel gewählt werden.

Tabelle 4.2 Eine Übersicht der (bedingten) Wahrscheinlichkeiten sowie des durchschnittlichen Behandlungseffektes zweier Studien (RE und N-RE).

	Maß	RE	N-RE
SME	$P(Y=1 X=0)$	0.291	0.076
	$P(Y=1 X=1)$	0.155	0.189
	β_1	-0.136	0.113 [†]
MEM	$P(Y=1 X=0, Z=\mu_Z)$	0.014	0.014
	$P(Y=1 X=1, Z=\mu_Z)$	0.133	0.133
	$g_1(\mu_Z)$	0.119 [†]	0.119 [†]
ADJ	$E[P(Y=1 X=0, Z)]$	0.291	0.291
	$E[P(Y=1 X=1, Z)]$	0.155	0.155
	$E[g_1(Z)]$	-0.136	-0.136

[†] = verfälscht, RE = Randomisiertes Experiment, N-RE = Nicht-randomisiertes Experiment

1000 Patienten durch das neue Medikament eine komplikationsfreie Besserung, während es in der Kontrollgruppe nur 76 von 1000 waren. Aufgrund der zweifachen Wirksamkeitsbestätigung wird das Medikament zugelassen und in den Handel gebracht.⁶ Dies stellt eine Fehlentscheidung mit gegebenenfalls weitreichenden Konsequenzen dar und kann unter Umständen sogar Menschenleben betreffen. Die Studienautoren haben in beiden Fällen Verfahren gewählt, die zu falschen kausalen Aussagen und hier sogar einer Effektumkehr führen. Eine (richtige) Berechnung der Adjustierten Marginalen Effekte ergibt in beiden Studien jeweils $E[g_1(Z)] = -0.136$ als unverfälschten durchschnittlichen Effekt. Beide Medikamente führen insgesamt häufiger zu einer komplikationsfreien Besserung (155 vs. 291 von 1000 Patienten). Das neue Medikament wirkt jedoch tatsächlich *schlechter* als das alte Medikament.

4.3 Benutzerhinweise

Der Aggregation[0,1]Xplorer umfasst derzeit eine grafische Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeiten, einen Vergleich der drei Aggregationsverfahren sowie die Generierung eines Datensatzes, gemäß den gewählten Modellparametern. Dabei kann aus vordefinierten oder selbst-definierten Modellparametern zur Berechnung gewählt

⁶Der eigentliche Prozess einer Medikamentenzulassung in Deutschland ist strikter und wird in diesem Beispiel ggf. nicht adäquat dargestellt.

werden.

Andere Implementierungen. Zur Analyse von empirischen Datensätzen mit den Adjustierten Marginalen Effekten finden sich bereits Implementierungen in STATA (Norton, Ai & Wang, 2004) und R (Leeper, 2018). Soweit bekannt, ist eine stichprobenunabhängige Exploration der verschiedenen Aggregationsverfahren jedoch einzigartig.⁷ Der Aggregation[0,1]Xplorer stellt damit eine funktionale Ergänzung bestehender Pakete dar.

4.3.1 Voraussetzungen

Die Webanwendung basiert auf der Programmiersprache R (R Core Team, 2019) mit den Erweiterungspaketen shiny (Chang, Cheng, Allaire, Xie & McPherson, 2018) für die interaktive Benutzeroberfläche und ggplot2 (Wickham & Chang, 2018) für die grafischen Darstellungen.

Schritt für Schritt Anleitung. Die dargestellten Schritte sind stark vereinfacht und setzen ein aktuelles Windows-Betriebssystem (z.B. Windows 10) voraus. Weiterführende Informationen befinden sich im Anhang C.

1. Zunächst kann eine aktuelle Version unter <https://gitlab.com/matthiasgehlert/bachelorthesis/-/archive/0.3/bachelorthesis-0.3.zip> heruntergeladen werden.
2. Die heruntergeladene Datei bachelorthesis-0.3.zip wird mit dem Windows-Explorer entpackt (Rechtsklick > Alle extrahieren...) und der Ordner geöffnet.
3. Nun kann die Datei shinyapplication.r mit R-Studio⁸ geöffnet (Rechtsklick > Öffnen mit...) und ausgeführt (Tastaturkürzel: Strg + Shift + Enter) werden.

4.3.2 Benutzeroberfläche

Abbildung 4.1 zeigt eine schematische Darstellung der grafischen Benutzeroberfläche (graphical user interface, GUI). Über den oberen Navigationsbereich (1) können verschiedene Sektionen (i-iii) ausgewählt werden. Jede Sektion besteht dabei aus einem Eingabe- (2) und einem Ausgabebereich (3).

⁷Weitere Webanwendungen (Shiny Applications) zur Exploration anderer methodischer Fehlannahmen finden sich u.a. bei Schauerte (2017) oder Jusepeitis und Steyer (2018).

⁸<https://rstudio.com/products/rstudio/download/#download>

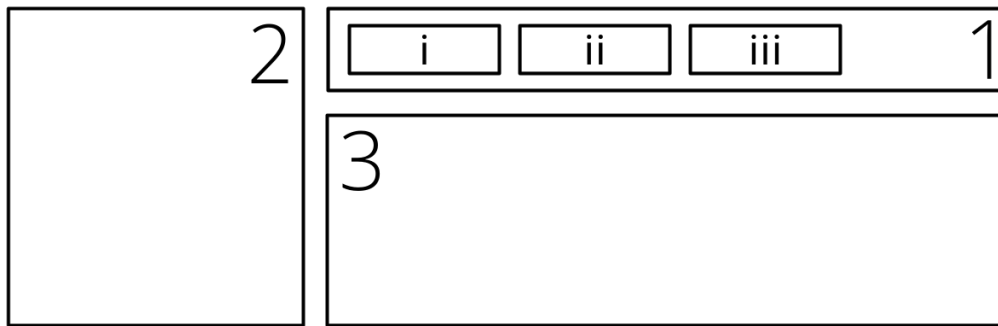


Abbildung 4.1 Eine schematische Darstellung des Aggregation[0,1]Xplorer.

- i Unter *Model Specification* können ein vordefiniertes Beispiel ausgewählt oder eigene Modellparameter (siehe Abschnitte 4.1.1 und 4.1.2) spezifiziert werden. Dies sind der Erwartungswert μ_Z (location parameter), die Varianz σ_Z^2 (scale parameter) sowie die Regressionskoeffizienten κ_0, κ_1 und $\lambda_{00}, \lambda_{01}, \lambda_{10}, \lambda_{11}$. Nach einmaliger Bestätigung werden die Sigmoidfunktionen sowie die aggregierten Effektmaße der Aggregationsverfahren (siehe Abschnitte 4.2.1 bis 4.2.3) ausgegeben.
- ii Unter *Generate Data* kann eine Stichprobengröße N gewählt werden. Daraufhin erscheint eine Vorschau des generierten Datensatzes und eine Schaltfläche zum Herunterladen. Der Datensatz enthält die Behandlungsvariable X , die Kovariate Z und die Ergebnisvariable Y (siehe Abschnitt 2). Die zusätzliche Variable ID dient der besseren Übersicht und kann vernachlässigt werden.
- iii Unter *About* befindet sich unter anderem eine kurze Übersicht der in diesem Text ausführlich dargestellten Informationen.

5 Diskussion

Die vorliegende Bachelorarbeit zeigt, dass eine Aggregation von bedingten Behandlungseffekten in der logistischen Regression nicht immer zu kausal unverfälschten Ergebnissen führt. Die Einfachen Marginalen Effekte und die Marginalen Effekte am Mittelwert sind mitunter verfälscht und sollten daher nicht für empirische Untersuchungen verwendet werden.

Als Alternative wurden Z -adjustierte Effektmaße (z.B. $E[g_1(Z)]$) vorgestellt, die auf den richtig aggregierten (X, Z) -bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Y=1|X, Z)$ beruhen. Falls diese bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Y=1|X, Z)$ unverfälscht sind, dann sind es auch die Effekte, die mit den Adjustierten Marginalen Effekten (siehe Abschnitt 4.2.3) aggregiert werden.

In der Literatur findet sich allerdings noch keine flächendeckende Verwendung dieser Z -adjustierten Effektmaße. In einigen Studien wird daher (mutmaßlich⁹) das falsche Aggregationsverfahren zur Aggregation von bedingten Behandlungseffekten in der logistischen Regression verwendet. So beschreibt unter anderem Mohanty (2012, S. 8):

Results are shown as predicted probabilities, which are derived from logistic regression; predicted probabilities *adjust at the mean* of all other independent variables.

Eine Verwendung der Marginalen Effekte am Mittelwert mit den beschriebenen Konsequenzen (siehe Abschnitt 4.2.2) liegt in dieser Studie offenbar vor.

Die Inhalte dieser Bachelorarbeit sind damit nicht nur eine methodische Feinjustierung, sondern gerade in der Praxis von höchster Relevanz.

⁹Eine genaue Analyse bestehender Publikationen ist durch fehlende Modellparameter bzw. nicht-öffentliche Datensätze meist schwierig.

A Literaturverzeichnis

- Beuth, P., Böhm, M., Peteranderl, S. & Pauly, M. (2019). Was über die Hacker, ihre Methoden und die Opfer bekannt ist. Zugriff 28. März 2019 unter <https://spiegel.de/netzwelt/web/daten-von-politikern-und-prominenten-geleakt-was-wir-ueber-taeter-und-opfer-wissen-a-1246406-druck.html>
- Frahm, C. (2019). Wie Grenzwerte entstehen – und wer sie festlegt. Zugriff 28. März 2019 unter <https://spiegel.de/auto/aktuell/grenzwerte-von-stickoxiden-wie-sie-entstehen-und-wer-sie-festlegt-a-1250788-druck.html>
- Gigerenzer, G., Swijtink, Z. & Porter, T. (1999). *Das Reich des Zufalls: Wissen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Unschärfen*. Heidelberg, Deutschland: Spektrum.
- Jusepeitis, A. & Steyer, R. (2018). *Which expectations are to be estimated in meta-analyses with binary outcome variables?* Manuskript in Vorbereitung, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Deutschland.
- Kersten, N. & Rose, U. (2007). *Kausales Schließen auf der Grundlage von Beobachtungsstudien: Tagungsdokumentation*. Dortmund, Deutschland: Bundesanstalt für Arbeitsschutz und Arbeitsmedizin.
- Kolmogoroff, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin, Deutschland: Springer.
- Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probabilities*. New York, USA: Chelsea Publishing.
- Leeper, T. J. (2018). Interpreting Regression Results using Average Marginal Effects with R's margins. Zugriff unter <https://cran.r-project.org/web/packages/margins/vignettes/TechnicalDetails.pdf>
- Mohanty, S. K. (2012). Multiple Deprivations and Maternal Care in India. *International Perspectives on Sexual and Reproductive Health*, 38(1), 6–14. doi:10.1363/3800612
- Muller, C. J. & MacLehose, R. F. (2014). Estimating predicted probabilities from logistic regression: Different methods correspond to different target populations. *International Journal of Epidemiology*, 43(3), 962–970. doi:10.1093/ije/dyu029
- Norton, E. C., Ai, C. & Wang, H. (2004). Computing Interaction Effects and Standard Errors in logit and probit models. *Stata Journal*, 4(2), 154–167. doi:10.1177/1536867X0400400206
- Peng, C.-Y. J., Lee, K. L. & Ingersoll, G. M. (2002). An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting. *The Journal of Educational Research*, 96(1), 3–14. doi:10.1080/00220670209598786

- Schauerte, A. J. (2017). *Zugrundeliegende Hypothesen verschiedener Analyseverfahren für nonorthogonale Designs: Eine Shiny App als Lerntool* (Bachelorarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Deutschland).
- Sengewald, M.-A. (2018). *Latent Covariates* (Dissertation, FU Berlin, Deutschland).
- Steyer, R. (2018). *Probability and Causality: Causal Total Effects*. Buch in Vorbereitung, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Deutschland. Zugriff unter <https://causal-effects.de>
- Steyer, R., Mayer, A., Geiser, C. & Cole, D. A. (2015). A Theory of States and Traits: Revised. *Annual Review of Clinical Psychology*, 11(1), 71–98. doi:10.1146/annurev-clinpsy-032813-153719
- Steyer, R. & Nagel, W. (2017). *Probability and Conditional Expectation: Fundamentals for the Empirical Sciences*. Wiley Series in Probability and Statistics. doi:10.1002/9781119243496
- Süsse, T. (2018). *Fitting Logistic Regression Models with Latent Processes*. Manuskript in Vorbereitung, University of Wollongong, Australien.

B Software

- Chang, W., Cheng, J., Allaire, J., Xie, Y. & McPherson, J. (2018). shiny: Web Application Framework for R. Zugriff unter <https://cran.r-project.org/package=shiny>
- R Core Team. (2019). R: A Language and Environment for Statistical Computing and Graphics. Zugriff unter <https://r-project.org>
- Wickham, H. & Chang, W. (2018). ggplot2: Create Elegant Data Visualisations Using the Grammar of Graphics. Zugriff unter <https://cran.r-project.org/package=ggplot2>

C Quellcode

Die vorliegende Bachelorarbeit (ver. *0.3-b20200101*) versteht sich als freie Software¹⁰.

Lizenz: GPL-2.0-only

Quellcode: <https://gitlab.com/matthiasgehlert/bachelorthesis>

Systemvoraussetzungen. Für die interaktive Webanwendung (`shinyapplication.r`) werden ein aktueller R-Build ($\geq 3.5.3$) und ein javascript-fähiger Webbrowser benötigt. Für diesen Text (`latexthesis.tex`) werden eine \LaTeX Distribution und ein PDF-Viewer vorausgesetzt. Das enthaltene Shell-Skript (`make.sh`) kann für unixartige Betriebssysteme verwendet werden.

Bugs. In der zugrundeliegenden Version sind keine Programmfehler (Bugs) oder andere Funktionseinschränkungen bekannt.

¹⁰<https://gnu.org/philosophy/free-sw.en.html>