# Кинетическое описание плазмы

## Модель N тел

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \equiv \frac{d\gamma_i m_i \vec{v}_i}{dt} = q_i \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \left[ \vec{v}_i \times \vec{B} \right] \right)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}} = \sqrt{1 + \left( \frac{p_i}{m_i c} \right)^2}$$

#### Гамильтоновость

Для электростатической системы

$$H = \sum_i \sqrt{\left(m_i c^2\right)^2 + \left(p_i c\right)^2} + \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} + \sum_i q_i \Phi_{\text{внеш}}(\vec{r}_i)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}$$

$$\dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i}$$

Можно обобщить на полностью электродинамическую систему

## Кинетическая модель

#### Функция распределения

- $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ — 6N-мерное фазовое пространство
- $\rho\left(t, \vec{r}_i, \vec{p}_i\right)$ — функция распределения, плотность вероятности обнаружить систему в фазовом объёме $d\vec{r}_i d\vec{p}_i$

#### Теорема Лиувилля

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_i} \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}_i} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = 0$$

**Доказательство** Закон сохранения числа частиц (уравнение непрерывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_{\text{6N}}(\rho \vec{v}_{\text{6N}}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left( \rho \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \left( \rho \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \right) =$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}_i}\frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial\vec{p}_i}\frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) + \rho\sum_i \left( \frac{\partial}{\partial\vec{r}_i}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\vec{p}_i}\left(\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) \right)$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial}{\partial\vec{r}_i}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\vec{p}_i}\left(\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) \right) = \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial\vec{r}_i}\left(\frac{\partial H}{\partial\vec{p}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial\vec{p}_i}\left(\frac{\partial H}{\partial\vec{r}_i}\right) \right) = 0$$

**Цепочка Боголюбова**

- $F_n(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{p}_n)$ — $n$-частичная функция распределения

$$F_n \equiv \int \rho(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_N) d\vec{r}_{n+1} d\vec{p}_{n+1} \dots d\vec{r}_N d\vec{p}_N$$

Из уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + \{F_n H_n\} = \sum_{i=1}^{n} (N-n)\frac{\partial}{\partial\vec{p}_i}\int \frac{\partial\Phi_{in+1}}{\partial\vec{r}_i} F_{n+1}\, d\vec{r}_{n+1} d\vec{p}_{n+1}$$

$$\Phi_{in+1} \equiv \frac{q_i q_{n+1}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{n+1}|}$$

Для 1-частичной функции распределения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial F_1}{\partial\vec{r}} + q_i\frac{d\Phi_{\text{сред}}}{d\vec{r}}\frac{\partial F_1}{\partial\vec{p}} = \frac{N}{V}\int \hat{\Theta}_{12} F_2\left(\vec{r}, \vec{p}, \vec{r}_2, \vec{p}_2\right) d\vec{r}_2 d\vec{p}_2$$

$$\hat{\Theta}_{12} \equiv \frac{\partial\Phi_{12}}{\partial\vec{r}}\frac{\partial}{\partial\vec{p}} + \frac{\partial\Phi_{12}}{\partial\vec{r}_2}\frac{\partial}{\partial\vec{p}_2}$$

**Уравнение Власова**

- Пренебрегаем столкновениями
- $f_s(t, \vec{r}, \vec{p})$ — одночастичная функция распределения для каждой фракции
- Поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ — усреднённые, самосогласованные

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\gamma m_s}\frac{\partial f_s}{\partial\vec{r}} + q_s\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma m_s c}\left[\vec{p}\times\vec{B}\right]\right)\frac{\partial f_s}{\partial\vec{p}} = 0$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_s c}\right)^2}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \text{rot}\vec{B} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\text{rot}\vec{E}$$

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi\varrho$$

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

**Моменты 1-частичной функции распределения**

- 0-й момент: концентрация частиц (скаляр)

$$n_s(t,\vec{r}) = \int f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Плотность заряда

$$\varrho(t,\vec{r}) = \sum_s q_s n_s(t,\vec{r})$$

- 1-й момент: плотность импульса (вектор)

$$n_s\vec{P}_s(t,\vec{r}) = \int \vec{p} f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Плотность тока

$$\vec{j}(t,\vec{r}) = \sum_s q_s \int \frac{\vec{p}}{\sqrt{1+(p/m_s c)^2}} f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- 2-й момент: плотность потока импульса (тензор)

$$\Pi_s^{ij}(t,\vec{r}) = \frac{1}{m_s}\int p^i p^j f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Давление (скаляр)

$$P = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\hat{\Pi} \equiv \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\Pi^{ii} \equiv \frac{1}{3m_s}\int p^2 f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Плотность энергии (скаляр)

$$w = \int \frac{p^2}{2m_s} f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Уравнение состояния

$$P = \frac{2}{3}w = \frac{2}{3}n_s\frac{3}{2}kT = n_s kT$$

**Интеграл столкновений**

- Аппроксимируем интеграл от 2-частичной функции распределения неким функционалом (называемым интегралом столкновений) от 1-частичной функции

$$\frac{df_s}{dt} = \sum_p Q(f_s, f_p)$$

- Это уравнение принято называть кинетическим уравнением Больцмана
- Конкретный вид Q определяется из физических соображений и использованных приближений

- Если столкновения упругие, то есть сохраняют импульс и энергию, и обусловлены действием центрально-симметричных сил, то в нерелятивистском пределе в самом общем виде интеграл столкновений может быть записан в виде

$$Q \equiv \frac{1}{m_s} \iint B\left(\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|, \vartheta\right) \left[f_s(\vec{p}_s + \vec{q}) f_p(\vec{p}_p - \vec{q}) - f_s(\vec{p}_s) f_p(\vec{p}_p)\right] d\vec{v}_p d\vec{q}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\left(\vec{v}_s - \vec{v}_p\right) \cdot \left(\vec{v}'_s - \vec{v}'_p\right)}{\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|^2}$$

- $B(v, \vartheta)$ называют ядром, и его вид определяется физическим механизмом столкновения
- Интеграл в таком виде сохраняет число частиц, полный импульс и энергию системы.

**$\tau$-приближение (Bhatnagar, Gross, Krook)**

$$Q(f_s, f_p) = \frac{1}{\tau_s}\left(f_s - f_{s0}\right)$$

$$f_{s0} \sim \exp\left(-\frac{\sqrt{\left(m_s c^2\right)^2 + (pc)^2} + q_s \Phi}{kT}\right)$$

**Кулоновский интеграл**

$$B\left(\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|, \vartheta\right) d\vec{q} = \left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right| d\sigma\left(\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|, \vartheta\right)$$

- $d\sigma(v, \vartheta)$ — дифференциальное сечение рассеяния
- формула Резерфорда:

$$d\sigma(v, \vartheta) = \left(\frac{q_s q_p}{2\mu_{sp} v^2}\right)^2 \frac{d\omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

- $q_s, q_p$ — электрические заряды сталкивающихся частиц
- $\mu_{sp} = m_s m_p / (m_s + m_p)$ — приведённая масса
- $d\omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ — единичный телесный угол
- При интегрировании по углам — логарифмически расходится

**Интеграл Ландау:**

- В малоугловом приближении столкновения приводят к диффузии в импульсном пространстве:

$$\frac{df_s}{dt} = -\nabla_{\vec{p}} \vec{I}$$

$$I_i = \sum_j 2\pi (q_s q_p)^2 L J_{ij}$$

$$J_{ij} = \int \left( f_s \frac{\partial f_p}{\partial p_{pj}} - f_p \frac{\partial f_s}{\partial p_{sj}} \right) \frac{\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|^2 \delta_{ij} - (v_{si} - v_{pi})(v_{sj} - v_{pj})}{\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|^3} d\vec{p}_p$$

- $L = \ln\left(\frac{1}{\vartheta_{\text{min}}}\right)$ — кулоновский логарифм, $\chi_{\text{min}}$ — минимальный угол отклонения частицы при сохранении кулоновского характера столкновения

$L = \ln\left(\frac{1}{\vartheta_{\text{min}}}\right)$

- $\vartheta_{\text{min}} \sim \frac{|q_s q_p|}{\mu_{sp} v^2 r_D}$ — при дебаевском характере экранировки в классическом случае, когда $E_{\text{kin}} \ll |q_s q_p|/\lambda_{\text{dB}}$: $|q_s q_p| \gg \hbar v$; соответствует прицельному параметру порядка радиуса Дебая
- $\vartheta_{\text{min}} \sim \frac{\hbar}{\mu_{sp} v r_D}$ — в квантовом случае, когда $|q_s q_p| \ll \hbar v$; соответствует прицельному параметру порядка длины волны де Бройля

**Свойства уравнения Власова**

**Несжимаемость фазового объёма**

$$\frac{df}{dt} = 0$$

**Принцип максимума**

$$0 \leq f(\vec{r}, \vec{p}, t) \leq \max_{\vec{r}, \vec{p}} f(\vec{r}, \vec{p}, 0)$$

**Законы сохранения**

- Сохранение $L^p$-норм

$$\frac{d}{dt}\left(\int f_s^p d\vec{r} d\vec{p}\right) = 0$$

$$p = 1, 2, ...$$

В электростатическом случае в отсутствии внешних полей:

- Закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt}\sum_s \left(\int \vec{p} f_s d\vec{r} d\vec{p}\right) = 0$$

- Закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\sum_s \left(\int (\gamma m_s c^2 + q_s \Phi(\vec{r})) f d\vec{r} d\vec{p}\right) = 0$$

**Дивергентная форма**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\gamma m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + q\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma m c}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}} = 0 \implies \frac{\vec{p}}{\gamma m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{f\vec{p}}{\gamma m}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{p}} = 0,\ \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left[\frac{\vec{p}}{\gamma mc} \times \vec{B}\right] = 0 \implies$$

$$q\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \equiv q\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(f\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma mc}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)\right)$$

$$\vec{A} = \left(\frac{\vec{p}}{\gamma m}, q\vec{E} + \frac{q}{\gamma mc}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\vec{r},\vec{p}}\left(\vec{A}f\right) = 0$$

**Характеристики**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{A} \cdot \nabla_{\vec{r},\vec{p}} f = 0$$

- Это уравнение переноса

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{A}(\vec{X}, t)$$

$$\vec{X}(s) = (\vec{r}, \vec{p}) \equiv \vec{x}$$

- $\vec{X}(t; s, \vec{x})$ — характеристики уравнения переноса

**Свойства характеристик**

- Транзитивность:

$$\vec{X}\left(t3; t2, \vec{X}(t2; t1, \vec{x})\right) = \vec{X}(t3; t1, \vec{x})$$

- Отображение $\vec{x} \to \vec{X}(t; s, \vec{x})$ — диффеоморфизм (взаимно однозначное и гладкое) по отношению к $\vec{y} \to \vec{X}(s; t, \vec{y})$
- Если $\nabla \vec{A} = 0$, то якобиан отображения:

$$J(t; s) \equiv \det(\nabla_{\vec{x}} \vec{X}(t; s, \vec{x})) = 1$$

- Характеристики дают решение исходного дифференциального уравнения:

$$f(\vec{x}, t) = f_0\left(\vec{X}(0; t, \vec{x})\right)$$

**Пример: Свободный одномерный поток**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- Уравнения характеристик:

$$\frac{dX}{dt} = V$$
$$\frac{dV}{dt} = 0$$

- Их решение:

$$V(t; s, x, v) = v$$
$$X(t; s, x, v) = x + v(t - s)$$

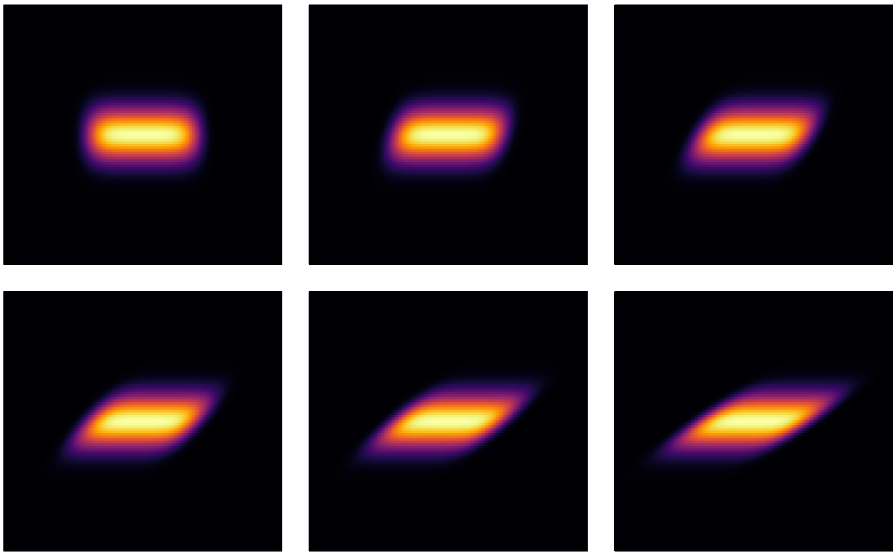
- Решение исходного уравнения:

$$f(x, v, t) = f_0(x - vt, v)$$

```
using Plots
using Interpolations
```

```
Info: Precompiling Interpolations [a98d9a8b-a2ab-59e6-89dd-64a1c18fca59]
@ Base loading.jl:1278
```

```
# x = [i for i = -100:100]
# v = [i for i = -50:50]
x = -100:100
v = -50:50
f  = [exp(-(j/10)^2)*exp(-(i/40)^6) for i = x, j = v];

itp = interpolate(f , BSpline(Cubic(Line(OnGrid()))))
f_itp = scale(itp, x, v);
f_etp = extrapolate(f_itp, 0);

ff = [f_etp(i - j*t, j) for i = x, j = v, t=0:0.5:2.5];

h = [heatmap(x, v, ff[:,:,i]', legend = :none, xticks = :none, yticks = :none) for i = 1:6

p = plot(h...,
    size = (800, 500));

display(p)
```



**Пример: Электронный пучок вблизи нуля линейно нарастающего поля**

- Имеем внешнее поле:

$$E = -x$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

- Уравнения характеристик:

$$\frac{dX}{dt} = V$$

$$\frac{dV}{dt} = -X$$

- Их решение:

$$V(t; s, x, v) = v\cos(t - s) - x\sin(t - s)$$

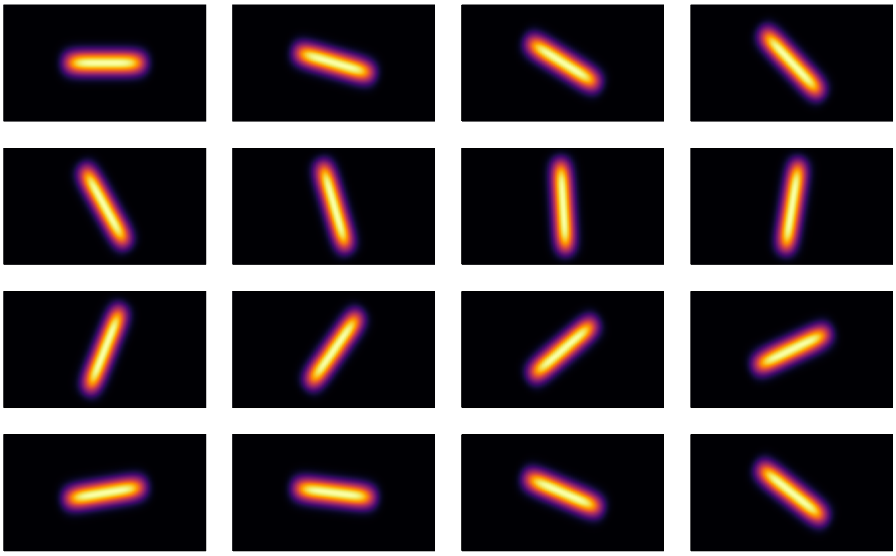
$$X(t; s, x, v) = x\cos(t - s) + v\sin(t - s)$$

- Решение исходного уравнения:

$$f(x, v, t) = f_0(x\cos t - v\sin t, v\cos t + x\sin t)$$

```
# x = [i for i = -100:100]
# v = [i for i = -50:50]
x = -100:100
v = -50:50
f  = [exp(-(j/10)^2)*exp(-(i/40)^6) for i = x, j = v];

itp = interpolate(f , BSpline(Cubic(Line(OnGrid()))))
f_itp = scale(itp, x, v);
f_etp = extrapolate(f_itp, 0);

ff = [f_etp(i*cos(t) - j*sin(t), j*cos(t) + i*sin(t)) for i = x, j = v, t=0.:0.25:8];
```

```
h = [heatmap(x, v, ff[:,:,i]', legend = :none, xticks = :none, yticks = :none) for i = 1:1

p = plot(
#     h1, h2, h3, h4, h5,
    h...,
    size = (800, 500),
#     layout = @layout [a b c d e]
    );

display(p)
```



## Что почитать


- Ландау, Лифшиц. *Курс теоретической физики*, том 5, § 1—3
- Лифшиц, Питаевский. *Курс теоретической физики*, том 10, § 3, 16, 41
- Eric Sonnendrücker. *Numerical methods for the Vlasov equations*. Lecture notes. 2013.
- G. Dimarco, L. Pareschi. Numerical methods for kinetic equations. Acta Numerica, Cambridge University Press (CUP), 2014, pp. 369-520.
- P. Degond. *Macroscopic limits of the Boltzmann equation: a review* // Modeling and Computational Methods for Kinetic Equations. Ed. P. Degond, L. Pareschi, G. Russo. 2004. P. 3.


## Дома

- Доказать:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_i}{c}\right)^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{p_i}{m_i c}\right)^2}$$

- Доказать:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left[ \frac{\vec{p}}{\gamma m c} \times \vec{B} \right] = 0$$

- Методом характеристик решить задачу о динамике плазмы во внешнем однородном магнитном поле:

$$f \equiv f(t, v_x, v_y) \vec{B} = \vec{z}_0 B_0 f(0, v_x, v_y) = F(v_x, v_y)$$