集合論の生成的多元宇宙と地質学入門

生成拡大の織り成すネットワーク

石井大海[1] [2]

筑波大学博士後期課程三年

November 23$^{\mathrm{rd}}$, 2018

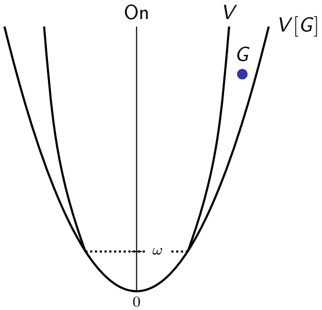
[1]The slide is available at `http://bit.ly/wakate-18`.

[2]This work was supported by Grant-in-Aid for JSPS Research Fellow Number 17J00479

Table Of Contents

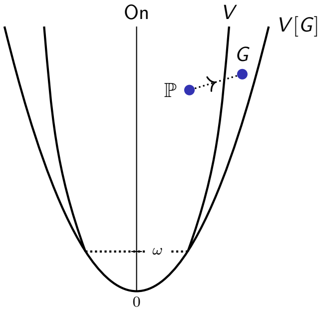
強制法とは？

- **強制法**：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の宇宙 $V[G]$ を得る方法.



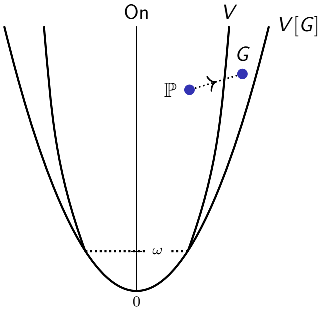
強制法とは？

- **強制法**：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の宇宙 $V[G]$ を得る方法.
    - G の近似の成す擬順序 $\mathbb{P}$ を考える.



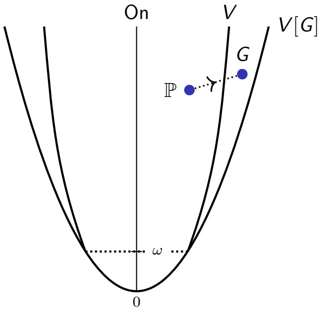
強制法とは？

- **強制法**：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の宇宙 $V[G]$ を得る方法.
  - G の近似の成す擬順序 $\mathbb{P}$ を考える.
- $V[G]$ を V の**生成拡大**, V を $V[G]$ の**基礎モデル**と呼ぶ.



強制法とは？

- **強制法**：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の宇宙 $V[G]$ を得る方法.
  - G の近似の成す擬順序 $\mathbb{P}$ を考える.
- $V[G]$ を V の**生成拡大**, V を $V[G]$ の**基礎モデル**と呼ぶ.



Remark 1

本講演では基礎モデルや生成拡大といったら，ZFC のモデルしか考えない．選択公理がなくても（更に ZF よりも弱い KP-集合論でも）強制法は考えられるが，あまりよく振る舞わないので……

強制法を巡る定義群

Definition 1

1. $(\mathbb{B}, \leq, 0, 1, \sum, -)$ が**完備 Boole 代数** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\leq$ は $0, 1$ を最小・最大元とする $\mathbb{B}$ 上の順序で，任意の $X \subseteq \mathbb{B}$ に対し $\sum X$ は X の $\mathbb{B}$ における上限を与える．特に $p + q := \sum\{\, p, q \,\}$ と略記する．$-p$ は p の補元と呼ばれ，$p + (-p) = 1$ を満たす．
2. $D \subseteq \mathbb{P}$ が**稠密** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall p \in \mathbb{P}\, \exists d \in D\; d \leq p$.
   - $\star$ 稠密集合は「普遍的に成立する性質」に相当する．
3. $F \subseteq \mathbb{P}$ が**フィルター** $\overset{\text{def}}{\iff}$ (1) $\mathbb{1} \in F, 0 \notin F$，(2) $p, q \in \mathbb{P}$ なら $p \cdot q \in F$, (3) $p \geq q \in F \implies p \in F$.
   - $\star$ 「貼り合わせ可能な近似の集合」と思える．
4. $\mathbb{P}$ の部分集合からなる族 $\mathcal{D}$ に対し，フィルター G が $\mathcal{D}$**-生成的**（$\mathcal{D}$-generic）$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall D \in \mathcal{D}$: dense in $\mathbb{P}$ $D \cap G \neq \emptyset$.
   $\mathcal{D} := \{\, D \in M \mid D : \mathbb{P}\text{ で稠密} \,\}$ のとき $(M, \mathbb{P})$**-生成的**という．
5. M と G を含む最小の推移的な宇宙 $M[G]$ を M の G による**生成拡大**といい，M は $M[G]$ の**基礎モデル**という．

生成拡大と真偽値

- 完備 Boole 代数（や擬順序）の事を**強制概念**とも呼ぶ.

生成拡大と真偽値

- 完備 Boole 代数（や擬順序）の事を**強制概念**とも呼ぶ.
- $(M, \mathbb{P})$-生成フィルターとは,「M が知っているあらゆる普遍的な条件を満たす仮想オブジェクト」と思える.

生成拡大と真偽値

- 完備 Boole 代数（や擬順序）の事を**強制概念**とも呼ぶ.
- $(M, \mathbb{P})$-生成フィルターとは,「M が知っているあらゆる普遍的な条件を満たす仮想オブジェクト」と思える.
- $M[G]$ の元はある **$\mathbb{P}$-名称** $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ の解釈 $\dot{x}^G$ として表される.

生成拡大と真偽値

- 完備 Boole 代数（や擬順序）の事を**強制概念**とも呼ぶ.
- $(M, \mathbb{P})$-生成フィルターとは,「M が知っているあらゆる普遍的な条件を満たす仮想オブジェクト」と思える.
- $M[G]$ の元はある **$\mathbb{P}$-名称** $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ の解釈 $\dot{x}^G$ として表される.
  - ⋆ 特に生成フィルターを表す $\mathbb{P}$-名称 $\dot{G}$ が存在する.

生成拡大と真偽値

- 完備 Boole 代数（や擬順序）の事を**強制概念**とも呼ぶ.
- $(M, \mathbb{P})$-生成フィルターとは,「M が知っているあらゆる普遍的な条件を満たす仮想オブジェクト」と思える.
- $M[G]$ の元はある $\mathbb{P}$-**名称** $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ の解釈 $\dot{x}^G$ として表される.
  - ⋆ 特に生成フィルターを表す $\mathbb{P}$-名称 $\dot{G}$ が存在する.
  - ⋆ M の各元 $x \in M$ に相当するチェック名称 $\check{x}$ も存在する.

生成拡大と真偽値

- 完備 Boole 代数（や擬順序）の事を**強制概念**とも呼ぶ.
- $(M, \mathbb{P})$-生成フィルターとは,「M が知っているあらゆる普遍的な条件を満たす仮想オブジェクト」と思える.
- $M[G]$ の元はある $\mathbb{P}$-**名称** $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ の解釈 $\dot{x}^G$ として表される.
  - ⋆ 特に生成フィルターを表す $\mathbb{P}$-名称 $\dot{G}$ が存在する.
  - ⋆ M の各元 $x \in M$ に相当するチェック名称 $\check{x}$ も存在する.
- 完備 Boole 代数の構造を使うと，任意の論理式と名称に対し，真偽値を定められる！

生成拡大と真偽値

- 完備 Boole 代数（や擬順序）の事を**強制概念**とも呼ぶ.
- $(M, \mathbb{P})$-生成フィルターとは,「M が知っているあらゆる普遍的な条件を満たす仮想オブジェクト」と思える.
- $M[G]$ の元はある **$\mathbb{P}$-名称** $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ の解釈 $\dot{x}^G$ として表される.
  - ⋆ 特に生成フィルターを表す $\mathbb{P}$-名称 $\dot{G}$ が存在する.
  - ⋆ M の各元 $x \in M$ に相当するチェック名称 $\check{x}$ も存在する.
- 完備 Boole 代数の構造を使うと，任意の論理式と名称に対し，真偽値を定められる！

Definition 2 (真偽値)

一階の論理式 φ ごとに，$\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ の関数として**真偽値** $[\![\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!] \in \mathbb{B}$ を次で定める：

$$[\![\dot{x} \in \dot{y}]\!] := (\text{いい感じ}), \quad [\![\varphi \vee \psi]\!] := [\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!], \quad [\![\neg\varphi]\!] := -[\![\varphi]\!]$$

$$[\![\exists x\, \varphi(x)]\!] := \sum_{\dot{x} \in M^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(\dot{x})]\!].$$

強制法定理

Theorem 3 (強制法定理)

このとき強制関係 $[\![-]\!]$ は次を満たす：

1. $[\![-]\!]$ は演繹について閉じている.
2. 任意の ZFC の定理 ψ に対し $[\![\psi]\!] = 1$.
3. $\left[\!\!\left[\begin{array}{l}\text{この宇宙は } M \text{ の } \dot{G} \text{ による生成拡大で,}\\ M \text{ は同じ順序数を持つ推移的宇宙}\end{array}\right]\!\!\right] = 1$,
4. (Łoś の定理, 強制法版) $(M, \mathbb{P})$-生成フィルター G に対し,

$$M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G) \iff [\![\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!] \in G.$$

強制法定理

Theorem 3 (強制法定理)

このとき強制関係 $[\![-]\!]$ は次を満たす：

1. $[\![-]\!]$ は演繹について閉じている.
2. 任意の ZFC の定理 ψ に対し $[\![\psi]\!] = 1$.
3. $\left[\!\!\left[\begin{array}{l}\text{この宇宙は } M \text{ の } \dot{G} \text{ による生成拡大で,} \\ M \text{ は同じ順序数を持つ推移的宇宙}\end{array}\right]\!\!\right] = 1,$
4. (Łoś の定理，強制法版) $(M, \mathbb{P})$-生成フィルター G に対し,

$$M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G) \iff [\![\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!] \in G.$$

- 真偽値の世界では $M^{\mathbb{P}}$ は $M[G]$ であるかのように振る舞う.

強制法定理

Theorem 3 (強制法定理)

このとき強制関係 $[\![-]\!]$ は次を満たす：

1. $[\![-]\!]$ は演繹について閉じている.
2. 任意の ZFC の定理 ψ に対し $[\![\psi]\!] = 1$.
3. $\left[\!\!\left[\begin{array}{l}\text{この宇宙は } M \text{ の } \dot{G} \text{ による生成拡大で,} \\ M \text{ は同じ順序数を持つ推移的宇宙}\end{array}\right]\!\!\right] = 1,$
4. (Łoś の定理，強制法版) $(M, \mathbb{P})$-生成フィルター G に対し,
$$M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_n^G) \iff [\![\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)]\!] \in G.$$

- 真偽値の世界では $M^{\mathbb{P}}$ は $M[G]$ であるかのように振る舞う.
- もし生成フィルター G があれば，$M[G]$ における一階の真理は真偽値が G に入るか否かで決まる！

集合論の生成多元宇宙と地質学

Definition 4

ある集合論の宇宙 U と，その基礎モデル・生成拡大の織りなすネットワーク $\mathcal{M}$ を**生成多元宇宙**と呼ぶ．より詳しく，以下を満たす宇宙の集まり $\mathcal{M}$ を生成多元宇宙と呼ぶ：

1. $\mathcal{M}$ は基礎モデルを取る操作で閉じている．
2. $\mathcal{M}$ は生成拡大を取る操作で閉じている．
3. $\mathcal{M}$ に属する任意の宇宙 M, N は，基礎モデルと生成拡大を取る有限回の操作で閉じている．

また，集合論の宇宙 M, N について，M が N の基礎モデルであるとき $M \nearrow N$ または $N \searrow M$ と表すことにする．

集合論の生成多元宇宙と地質学

Definition 4

ある集合論の宇宙 U と，その基礎モデル・生成拡大の織りなすネットワーク $\mathcal{M}$ を**生成多元宇宙**と呼ぶ．より詳しく，以下を満たす宇宙の集まり $\mathcal{M}$ を生成多元宇宙と呼ぶ：

1. $\mathcal{M}$ は基礎モデルを取る操作で閉じている．
2. $\mathcal{M}$ は生成拡大を取る操作で閉じている．
3. $\mathcal{M}$ に属する任意の宇宙 M, N は，基礎モデルと生成拡大を取る有限回の操作で閉じている．

また，集合論の宇宙 M, N について，M が N の基礎モデルであるとき $M \nearrow N$ または $N \searrow M$ と表すことにする．

- 生成多元宇宙の構造の分析が近年盛んに行われている．

集合論の生成多元宇宙と地質学

Definition 4

ある集合論の宇宙 U と，その基礎モデル・生成拡大の織りなすネットワーク $\mathcal{M}$ を**生成多元宇宙**と呼ぶ．より詳しく，以下を満たす宇宙の集まり $\mathcal{M}$ を生成多元宇宙と呼ぶ：

1. $\mathcal{M}$ は基礎モデルを取る操作で閉じている．
2. $\mathcal{M}$ は生成拡大を取る操作で閉じている．
3. $\mathcal{M}$ に属する任意の宇宙 M, N は，基礎モデルと生成拡大を取る有限回の操作で閉じている．

また，集合論の宇宙 M, N について，M が N の基礎モデルであるとき $M \nearrow N$ または $N \searrow M$ と表すことにする．

- 生成多元宇宙の構造の分析が近年盛んに行われている．
- 生成多元宇宙のうち，ある宇宙の基礎モデルを調べる分野を**集合論の地質学**（**set-theoretic geology**）と呼ぶ．

生成多元宇宙の基本構造

- 反射性：自明な強制法 $2 = \{0, 1\}$ を考えれば，宇宙 M は M 自身の基礎モデルであり，生成拡大でもある．

生成多元宇宙の基本構造

- 反射性：自明な強制法 $2 = \{0, 1\}$ を考えれば，宇宙 M は M 自身の基礎モデルであり，生成拡大でもある．
- 推移性：$M \nearrow N \nearrow N'$ なら $M \nearrow N'$ となる．

生成多元宇宙の基本構造

- 反射性：自明な強制法 $2 = \{0, 1\}$ を考えれば，宇宙 M は M 自身の基礎モデルであり，生成拡大でもある.
- 推移性：$M \nearrow N \nearrow N'$ なら $M \nearrow N'$ となる.
  - 強制概念 $\mathbb{P}$ と強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{Q}}$ に対し，**反復強制概念** $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ が定義出来る.

生成多元宇宙の基本構造

- 反射性：自明な強制法 $2 = \{0, 1\}$ を考えれば，宇宙 M は M 自身の基礎モデルであり，生成拡大でもある．
- 推移性：$M \nearrow N \nearrow N'$ なら $M \nearrow N'$ となる．
  - 強制概念 $\mathbb{P}$ と強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{Q}}$ に対し，**反復強制概念** $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ が定義出来る．
  - $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ の生成フィルターと $\mathbb{P}$-生成拡大の中の $\mathbb{Q}$-生成フィルターは一対一に対応する！

生成多元宇宙の基本構造

- 反射性：自明な強制法 $2 = \{0, 1\}$ を考えれば，宇宙 M は M 自身の基礎モデルであり，生成拡大でもある.
- 推移性：$M \nearrow N \nearrow N'$ なら $M \nearrow N'$ となる.
  - 強制概念 $\mathbb{P}$ と強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{Q}}$ に対し，**反復強制概念** $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ が定義出来る.
  - $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ の生成フィルターと $\mathbb{P}$-生成拡大の中の $\mathbb{Q}$-生成フィルターは一対一に対応する！
  - ⋆ 二回の生成拡大を一回で出来る！

生成多元宇宙の基本構造

- 反射性：自明な強制法 $2 = \{0, 1\}$ を考えれば，宇宙 M は M 自身の基礎モデルであり，生成拡大でもある．
- 推移性：$M \nearrow N \nearrow N'$ なら $M \nearrow N'$ となる．
  - 強制概念 $\mathbb{P}$ と強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{Q}}$ に対し，**反復強制概念** $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ が定義出来る．
  - $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ の生成フィルターと $\mathbb{P}$-生成拡大の中の $\mathbb{Q}$-生成フィルターは一対一に対応する！
  - ⋆ 二回の生成拡大を一回で出来る！
  - 二つの強制概念 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ に対し，強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{R}}$ があって $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{P} * \dot{\mathbb{R}}$ となるとき，$\mathbb{P}$ は $\mathbb{Q}$ の**完備部分順序**であるという．$\dot{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{P}$ による商（の名称）と呼び，$(\mathbb{Q} : \mathbb{P})$ で表す．

生成多元宇宙の基本構造

- 反射性：自明な強制法 $2 = \{0, 1\}$ を考えれば，宇宙 M は M 自身の基礎モデルであり，生成拡大でもある.
- 推移性：$M \nearrow N \nearrow N'$ なら $M \nearrow N'$ となる.
  - 強制概念 $\mathbb{P}$ と強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{Q}}$ に対し，**反復強制概念** $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ が定義出来る.
  - $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ の生成フィルターと $\mathbb{P}$-生成拡大の中の $\mathbb{Q}$-生成フィルターは一対一に対応する！
  - ⋆ 二回の生成拡大を一回で出来る！
  - 二つの強制概念 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ に対し，強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{R}}$ があって $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{P} * \dot{\mathbb{R}}$ となるとき，$\mathbb{P}$ は $\mathbb{Q}$ の**完備部分順序**であるという. $\dot{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{P}$ による商（の名称）と呼び，$(\mathbb{Q} : \mathbb{P})$ で表す.
- 以上から，生成多元宇宙におけるある宇宙 M から別の N へのパスは，生成拡大と基礎モデルを取る操作を一回ずつ交互に取ったものになっていることがわかる.

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！

? 「生成拡大を取る操作で閉じている」「基礎モデルを取る操作で閉じている」とはどういうことか？

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！
- ? 「生成拡大を取る操作で閉じている」「基礎モデルを取る操作で閉じている」とはどういうことか？
    - 「生成拡大」や「基礎モデル」を何処から取ってくるのか？

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！

? 「生成拡大を取る操作で閉じている」「基礎モデルを取る操作で閉じている」とはどういうことか？

  - 「生成拡大」や「基礎モデル」を何処から取ってくるのか？

$\rightsquigarrow$ ちゃんと「定義」するための枠組みが幾つか提案されている

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！

? 「生成拡大を取る操作で閉じている」「基礎モデルを取る操作で閉じている」とはどういうことか？

  - 「生成拡大」や「基礎モデル」を何処から取ってくるのか？

  ⇝ ちゃんと「定義」するための枠組みが幾つか提案されている
  - 最近の私の研究：新しい枠組みを提案できないか考えている.

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！

? 「生成拡大を取る操作で閉じている」「基礎モデルを取る操作で閉じている」とはどういうことか？

  - 「生成拡大」や「基礎モデル」を何処から取ってくるのか？

  $\rightsquigarrow$ ちゃんと「定義」するための枠組みが幾つか提案されている

  - 最近の私の研究：新しい枠組みを提案できないか考えている.

? 生成多元宇宙で包含関係と生成拡大関係は一致するか？

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！
- ? 「生成拡大を取る操作で閉じている」「基礎モデルを取る操作で閉じている」とはどういうことか？
  - 「生成拡大」や「基礎モデル」を何処から取ってくるのか？
  - $\rightsquigarrow$ ちゃんと「定義」するための枠組みが幾つか提案されている
  - 最近の私の研究：新しい枠組みを提案できないか考えている.
- ? 生成多元宇宙で包含関係と生成拡大関係は一致するか？
  - つまり，二つの宇宙 $M, N \in \mathcal{M}$ を取ったとき，$M \subseteq N$ なら M は N の基礎になっているか？

生成多元宇宙の基本的な問題

- そもそも上の「定義」はちゃんとした定義になっていない！
- ? 「生成拡大を取る操作で閉じている」「基礎モデルを取る操作で閉じている」とはどういうことか？
  - 「生成拡大」や「基礎モデル」を何処から取ってくるのか？
  - $\rightsquigarrow$ ちゃんと「定義」するための枠組みが幾つか提案されている
  - 最近の私の研究：新しい枠組みを提案できないか考えている．
- ? 生成多元宇宙で包含関係と生成拡大関係は一致するか？
  - つまり，二つの宇宙 $M, N \in \mathcal{M}$ を取ったとき，$M \subseteq N$ なら M は N の基礎になっているか？
- 以下，こうした問題について見ていく．

Table Of Contents

集合論の地質学

- ある集合論の宇宙 M が与えられたとき，より小さな宇宙 $N \subseteq M$ の生成拡大 $N[G]$ になっている事がある.
- そうした「生成多元宇宙における，ある宇宙の下部構造」を調べる分野を**集合論の地質学**と呼ぶ.
  - 基礎モデル＝ ground ＝地面，を調べる分野，というシャレ
- 集合論の地質学の基本的な定義を以下に掲げる.

Definition 5

V の基礎すべての共通部分 $\mathbb{M}^V$ を**（生成）マントル**という.

? そもそも $\mathbb{M}$ は well-defined だろうか？

集合論の地質学の第一基本定理：基礎モデルの定義可能性

⋆ 実は V の基礎モデルは，V の中で一様に列挙できる！

Theorem 6 (Woodin and Laver [10], independently; Fuchs–Hamkins–Reitz [3])

基礎モデルは一様かつ絶対的に定義可能．すなわち，以下を満たす ZFC の言語の一階論理式 $\varphi(x, y)$ が存在する：

1. r ごとに $W_r := \{\, x \mid \varphi(r, x) \,\}$ は V の基礎モデルで $r \in W_r$
2. V の任意の基礎モデル M は $r \in M$ により $W_r = M$ と書ける．
3. W_r は次の意味で下方絶対的：V の任意の内部モデル U で $W_r \subseteq U \subseteq V$ を満たすものについて，$W_r^U = W_r^V = W_r$.
4. W_r は次の意味で上方絶対的：任意の $r \in V$ と V の生成拡大 $V[G] \supseteq V$ に対し，$W_s^V = W_s^{V[G]}$ を満たす $s \in W_r$ が取れる．

基礎モデル定義可能性定理証明のあらまし

1. ZFC を満たす宇宙 $M \subseteq N$ の組 (M, N) に対し，「**κ-被覆性質**」「**κ-近似性質**」という組合せ論的な性質を定義する．
2. ZFC の部分体系 ZFC_κ を考える．これは宇宙を途中で切った H_θ などがモデルになるくらい弱い．
3. κ-近似性質と κ-被覆性質を満たす ZFC_κ 内部モデル（**κ-擬基礎モデル**と呼ぶ）は ${}^{<\kappa}2$ で一意に定義出来る！
4. 実は基礎モデルは十分大きな κ に対し κ-擬基礎になる！
5. じゃあ κ-擬基礎モデルを列挙してその中から基礎モデルを持ってくればいいよね！
6. 証明は Fuchs–Hamkins–Reitz [3] か拙稿 [15] 参照．

Ground Definability の帰結

- 基礎モデルを列挙し，数えることができる！ マントルもちゃんと定義出来る！

Definition 7

1. V の生成マントルは $\mathbb{M}^V := \bigcap_r W_r^V$ により定義される．よりハッキリ書くなら，$x \in \mathbb{M}^V \iff \forall r \in V\, \varphi(r,x)$
2. 宇宙 M が**高々集合個の基礎モデルを持つ**とは，集合 $X \in M$ があって，任意の r に対し，$W_r = W_s$ となる $s \in X$ が存在することを言う．

生成マントル $\mathbb{M}$

- ? $\mathbb{M}$ は集合論のモデルになるだろうか？
- ? $\mathbb{M}$ がそれ自身 V の基礎モデルになるのはどう言う時か？
- ? $\mathbb{M}$ は強制法で不変か？
- ⋆ 上の疑問は，以下の**下方有向性原理**から解決出来ることが知られていた：

Definition 8

- **基礎モデルの下方有向性原理**（Downward Directed Grounds Principle; DDG）とは次の言明である：V の任意の二つの基礎モデル $M, N \subseteq V$ に対し，M, N の共通の基礎モデル $U \subseteq M \cap N$ が存在する.
- **強い下方有効性原理**（sDDG）：任意の集合 $X \in V$ に対し，$\{ W_r \mid r \in X \}$ の共通の基礎モデルが存在する.

下方有向性原理の帰結

- 集合論の地質学が創始された Hamkins らの論文 [3] で既に sDDG の強力さは指摘されていた：

Lemma 9

sDDG が ZFC の定理だとすると，以下が成立する：

1. 生成多元宇宙に属する任意の二つの宇宙 N, M は，共通の基礎モデル $U \subseteq N \cap M$ を持つ．
2. 生成多元宇宙における包含関係と生成拡大の関係は一致する．
3. M の生成マントルが M の基礎モデル $\iff$ M は高々集合個しか基礎モデルを持たない．
4. 生成マントルは強制法で不変な最大の推移的クラスである．特に，生成マントルは宇宙単体だけでなく生成多元宇宙 $\mathcal{M}$ に対して *well-defined* となる．
5. 生成マントル $\mathbb{M}$ は ZFC を満たす．

DDG の帰結の証明：(1) 生成多元宇宙における共通基礎モデルの存在

下図より明らか：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
M \arrow[dr] & & N_0 \arrow[dr] & \models \mathrm{DDG} \\
& U_0 \arrow[ur] \arrow[dr, dotted] & & N \arrow[dl, dotted] \\
& & U &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & & N \\
M \arrow[dr] & & N_0 \arrow[ur] & \\
& U \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

DDG の帰結の証明：(2) 生成多元宇宙における包含関係

- 次の補題から直ちに従う：

Fact 10 (Sandwich Lemma, Grigorieff)

M, N を ZFC の推移的モデル，G を $(M, \mathbb{P})$-生成フィルターで $M \subseteq N \subseteq M[G]$ なるものとする．この時，M は N の基礎モデルであり，N は $M[G]$ の基礎モデルである．特に，完備部分順序 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ があって，$N = M[G \cap \mathbb{Q}]$, $M[G] = N[G \cap (\mathbb{P} : \mathbb{Q})^G]$ となる．

Remark 2

ここで選択公理は本質的に外せない！

1. $M \subseteq N$ とする．1 より共通の基礎 $U \nearrow M, N$ が取れる．
2. このとき Sandwich Lemma を $U \nearrow M \subseteq N$ に対して適用すれば，$U \nearrow N$ より $M \nearrow N$ を得る．

DDG の帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

$(\Longrightarrow)$:

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.

DDG の帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

$(\Longrightarrow)$:

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.
2. この時，sDDG より共通の基礎 $W^* \subseteq \bigcap_r W_r = \mathbb{M}$ が取れる.

DDG の帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

($\Longrightarrow$):

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.
2. この時，sDDG より共通の基礎 $W^* \subseteq \bigcap_r W_r = \mathbb{M}$ が取れる.
3. 反復を考えれば $W^* \nearrow V$ でもあるので $\mathbb{M} \subseteq W^*$ となり，結局 $\mathbb{M} = W^* \nearrow V$ を得る.

DDG の帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

($\Longrightarrow$):

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.
2. この時，sDDG より共通の基礎 $W^* \subseteq \bigcap_r W_r = \mathbb{M}$ が取れる.
3. 反復を考えれば $W^* \nearrow V$ でもあるので $\mathbb{M} \subseteq W^*$ となり，結局 $\mathbb{M} = W^* \nearrow V$ を得る.

($\Longleftarrow$):

1. $\mathbb{P} \in \mathbb{M}$ と $(\mathbb{M}, \mathbb{P})$-生成フィルター G，$V = \mathbb{M}[G]$ とする.

DDG の帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

($\Longrightarrow$):

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.
2. この時，sDDG より共通の基礎 $W^* \subseteq \bigcap_r W_r = \mathbb{M}$ が取れる.
3. 反復を考えれば $W^* \nearrow V$ でもあるので $\mathbb{M} \subseteq W^*$ となり，結局 $\mathbb{M} = W^* \nearrow V$ を得る.

($\Longleftarrow$):

1. $\mathbb{P} \in \mathbb{M}$ と $(\mathbb{M}, \mathbb{P})$-生成フィルター G，$V = \mathbb{M}[G]$ とする.
2. このとき，任意の r に対して $\mathbb{M} \subseteq W_r \nearrow V$ となる.

DDGの帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

$(\Longrightarrow)$:

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.
2. この時，sDDGより共通の基礎 $W^* \subseteq \bigcap_r W_r = \mathbb{M}$ が取れる.
3. 反復を考えれば $W^* \nearrow V$ でもあるので $\mathbb{M} \subseteq W^*$ となり，結局 $\mathbb{M} = W^* \nearrow V$ を得る.

$(\Longleftarrow)$:

1. $\mathbb{P} \in \mathbb{M}$ と $(\mathbb{M}, \mathbb{P})$-生成フィルター G，$V = \mathbb{M}[G]$ とする.
2. このとき，任意の r に対して $\mathbb{M} \subseteq W_r \nearrow V$ となる.
3. Sandwich Lemmaより $\mathbb{M} \nearrow W_r$ となる.

DDG の帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

$(\Longrightarrow)$:

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.
2. この時，sDDG より共通の基礎 $W^* \subseteq \bigcap_r W_r = \mathbb{M}$ が取れる.
3. 反復を考えれば $W^* \nearrow V$ でもあるので $\mathbb{M} \subseteq W^*$ となり，結局 $\mathbb{M} = W^* \nearrow V$ を得る.

$(\Longleftarrow)$:

1. $\mathbb{P} \in \mathbb{M}$ と $(\mathbb{M}, \mathbb{P})$-生成フィルター G，$V = \mathbb{M}[G]$ とする.
2. このとき，任意の r に対して $\mathbb{M} \subseteq W_r \nearrow V$ となる.
3. Sandwich Lemma より $\mathbb{M} \nearrow W_r$ となる.
4. すると，$\mathbb{P}$ の完備部分順序 $\mathbb{Q}$ があって $W_r = \mathbb{M}[G \cap \mathbb{Q}]$ となっている.

DDG の帰結の証明：(3) $\mathbb{M}$ が基礎モデルになる条件

$(\Longrightarrow)$:

1. 集合 X により基礎が $\{ W_r \mid r \in X \}$ で列挙出来ているとする.
2. この時，sDDG より共通の基礎 $W^* \subseteq \bigcap_r W_r = \mathbb{M}$ が取れる.
3. 反復を考えれば $W^* \nearrow V$ でもあるので $\mathbb{M} \subseteq W^*$ となり，結局 $\mathbb{M} = W^* \nearrow V$ を得る.

$(\Longleftarrow)$:

1. $\mathbb{P} \in \mathbb{M}$ と $(\mathbb{M}, \mathbb{P})$-生成フィルター G，$V = \mathbb{M}[G]$ とする.
2. このとき，任意の r に対して $\mathbb{M} \subseteq W_r \nearrow V$ となる.
3. Sandwich Lemma より $\mathbb{M} \nearrow W_r$ となる.
4. すると，$\mathbb{P}$ の完備部分順序 $\mathbb{Q}$ があって $W_r = \mathbb{M}[G \cap \mathbb{Q}]$ となっている.
5. そんな $\mathbb{Q}$ は高々 $2^{2^{|\mathbb{P}|}}$ 個だから，W_r も高々 $2^{2^{|\mathbb{P}|}}$ 個しかない.

DDG の帰結の証明：(4) マントルの不変性

1. V の基礎モデルは $V[G]$ の基礎でもあるので，$\mathbb{M}^{V[G]} \subseteq \mathbb{M}^{V}$ はあたりまえ.

DDG の帰結の証明：(4) マントルの不変性

1. V の基礎モデルは $V[G]$ の基礎でもあるので，$\mathbb{M}^{V[G]} \subseteq \mathbb{M}^{V}$ はあたりまえ.
2. $x \notin \mathbb{M}^{V[G]}$ として $x \notin \mathbb{M}^{V}$ を示す.

DDG の帰結の証明：(4) マントルの不変性

1. V の基礎モデルは $V[G]$ の基礎でもあるので，$\mathbb{M}^{V[G]} \subseteq \mathbb{M}^{V}$ はあたりまえ.
2. $x \notin \mathbb{M}^{V[G]}$ として $x \notin \mathbb{M}^{V}$ を示す.
3. $\mathbb{M}^{V[G]}$ の定義より，$U \swarrow V[G]$ で $x \notin U$ を満たすものが存在.

DDG の帰結の証明：(4) マントルの不変性

1. V の基礎モデルは $V[G]$ の基礎でもあるので，$\mathbb{M}^{V[G]} \subseteq \mathbb{M}^{V}$ はあたりまえ.
2. $x \notin \mathbb{M}^{V[G]}$ として $x \notin \mathbb{M}^{V}$ を示す.
3. $\mathbb{M}^{V[G]}$ の定義より，$U \swarrow V[G]$ で $x \notin U$ を満たすものが存在.
4. (2) より $U \searrow W \swarrow V$ なる共通の基礎 W が取れる.

DDG の帰結の証明：(4) マントルの不変性

1. V の基礎モデルは $V[G]$ の基礎でもあるので，$\mathbb{M}^{V[G]} \subseteq \mathbb{M}^V$ はあたりまえ.
2. $x \notin \mathbb{M}^{V[G]}$ として $x \notin \mathbb{M}^V$ を示す.
3. $\mathbb{M}^{V[G]}$ の定義より，$U \swarrow V[G]$ で $x \notin U$ を満たすものが存在.
4. (2) より $U \searrow W \swarrow V$ なる共通の基礎 W が取れる.
5. $W \subseteq U$ なので，$x \notin W \supseteq \mathbb{M}^V$.

DDG の帰結の証明：(5) $\mathbb{M} \models$ ZFC

1. $\mathbb{M}$ が ZF を満たすことは DDG から言えるが，準備が面倒臭なので略.
2. 選択公理の証明に sDDG が必要．特に整列定理を示す.
3. $x \in \mathbb{M}$ を一個固定し，$\mathbb{M}$ が x の整列順序を持つことを見る.
4. $\mathcal{W} := \{\, \Delta \mid \Delta : \text{整列順序 on } x, \Delta \notin \mathbb{M} \,\}$ とおく.
5. 各 $\Delta \in \mathcal{W}$ に対し，マントルの定義から $\Delta \notin W_{r_\Delta}$ となる r_Δ たちが取ってこれる（選択公理を使っている）.
6. $\{\, r_\Delta \mid \Delta \in \mathcal{W} \,\}$ は集合となるから，sDDG より W_{r_Δ} たちの共通の基礎モデル $U \swarrow W_{r_\Delta}$ が取れる.
7. U 自身は ZFC のモデルで $x \in \mathbb{M} \subseteq U$ なので，x 上の整列順序 $\Delta^* \in U$ が取れる.
8. すると $\mathcal{W}$ と r_Δ たちの定義より，$\Delta^* \notin \mathcal{W}$ が言え，$\mathcal{W}$ の定義から $\Delta^* \in \mathbb{M}$ となる.

DDG はすごい

- sDDG はすごいということがわかった.
  - ⋆ 基礎モデルしか見ていないが，地質学だけではなく多元宇宙全体の構造もよくわかるようになる！
- sDDG はすごすぎて，証明出来ないのではないかと思われていたが，薄葉氏が去年（！）ZFC から証明してしまった！

Theorem 11 (集合論の地質学の第二基本定理 sDDG, Usuba [12])

基礎モデルの強い下方有向性原理 sDDG は ZFC の定理．即ち，任意の集合 X に対し，$\{ W_r \mid r \in X \}$ は共通の基礎モデルを持つ．

証明の鍵：Bukovský の定理

証明には次の Bukovský の定理が本質的な役割を果す：

Definition 12 (大域被覆性質)

同じ順序数を持つ推移的モデルの組 (M, N) が κ-**大域被覆性質** (κ-GCP）を満たす $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の順序数 α と関数 $f : \alpha \to \mathrm{On}$, $f \in N$ に対して，$F \in M$ なる $F : \alpha \to [\mathrm{On}]^{<\kappa}$ で $f(\beta) \in F(\beta)$ を満たすものが存在する．

Theorem 13 (Bukovský [1])

N が M の生成拡大 $\iff$ M のある正則基数 κ について (M, N) が κ-GCP を持つことは同値．

- $(\Longrightarrow)$ は強制法を知っていれば簡単．
- $(\Longleftarrow)$ は或る種の無限論理の体系を使って，選択公理や記述集合論の力を借りつつ具体に強制概念を構成する．
- 証明の詳細は Friedman–Fuchino–Sakai [2] か拙稿 [16] 参照．

sDDG の証明のあらまし

1. 集合 X を固定する．Sandwich Lemma から，V の基礎モデル W で $W \subseteq \bigcap_{r \in X} W_r$ なるものが取れればよい．
2. 組合せ論を頑張って，次の性質を満たす集合モデルの列 $\langle M^\theta \mid \theta \nearrow \mathrm{On} \rangle$ を取る：
    1. 各 $M^\theta \subseteq H_\theta$ は κ^+-大域被覆性質を満たす，
    2. $M^\theta \subseteq \bigcap_{r \in X} W_r$，
    3. $\theta < \theta'$ なら $M^{\theta'} \cap H_\theta = M^\theta$．
3. この時 $W := \bigcup_\theta M^\theta$ が求めるものとなる．
4. $W \subseteq \bigcap_{r \in X} W_r$ は条件 2から明らか．
5. 条件 3を使うと $W \models \mathrm{ZFC}$ がわかる．
6. κ^+-大域被覆モデルの終拡張列の和なので，W はそれ自身 κ^+-GCP を持つ．
7. よって Bukovský の定理 13より W は V の基礎モデルになる．

⋆ 詳細は Usuba [12] または拙稿 [17] 参照

まとめと未解決問題

- 与えられた宇宙の基礎モデルは**一様に定義可能**
- 強い**下方有向性原理** sDDG から多元宇宙の事がわかる.
  - 生成多元宇宙における包含関係は生成拡大関係と一致する.
  - 生成多元宇宙の任意の二元は共通の基礎モデルを持つ.
  - 基礎の共通部分＝マントル $\mathbb{M}$ は強制法で不変な最大の ZFC のモデル.

! 選択公理がないとこれまでの議論は大部分崩壊する！

- Sandwich Lemma や Bukovský Theorem は ZFC のモデルでしか成り立たない.
  - $\rightsquigarrow$ 基礎モデルの定義可能や下方有向性原理の証明が通らない！
  - V が ZFC のモデルなら，選択公理の成り立たない V の基礎モデルも定義可能 [Usuba, unpublished?]
- マントルも ZFC のモデルしか共通部分をとっていない！
  - 選択公理がないモデルも考えるとわからない，何も…….

? 強制概念の種類を制限した多元宇宙で DDG が成り立つか？

Table Of Contents

生成多元宇宙の定式化問題

- 生成多元宇宙の扱いは，集合論の地質学に比べ困難が多い

生成多元宇宙の定式化問題

- 生成多元宇宙の扱いは，集合論の地質学に比べ困難が多い
- そもそも「宇宙」として何を扱うか？

生成多元宇宙の定式化問題

- 生成多元宇宙の扱いは，集合論の地質学に比べ困難が多い
- そもそも「宇宙」として何を扱うか？
  1. 可算推移的モデル（c.t.m.）
  2. V そのもの（真のクラス）
- 既存の手法では 1 に類する手法が多い

生成多元宇宙の定式化問題

- 生成多元宇宙の扱いは，集合論の地質学に比べ困難が多い
- そもそも「宇宙」として何を扱うか？
  1. 可算推移的モデル（c.t.m.）
  2. V そのもの（真のクラス）
- 既存の手法では 1に類する手法が多い

  ! V 上の非自明な生成フィルターは V にはないので何処からも持ってこれない！

生成多元宇宙の定式化問題

- 生成多元宇宙の扱いは，集合論の地質学に比べ困難が多い
- そもそも「宇宙」として何を扱うか？
  1. 可算推移的モデル（c.t.m.）
  2. V そのもの（真のクラス）
- 既存の手法では 1 に類する手法が多い

! V 上の非自明な生成フィルターは V にはないので何処からも持ってこれない！

  - $\mathbb{B}$ が極小元を持つ $\iff$ $(V, \mathbb{B})$-生成フィルターが V に存在.

生成多元宇宙の定式化問題

- 生成多元宇宙の扱いは，集合論の地質学に比べ困難が多い
- そもそも「宇宙」として何を扱うか？
  1. 可算推移的モデル（c.t.m.）
  2. V そのもの（真のクラス）
- 既存の手法では 1に類する手法が多い
  - ! V 上の非自明な生成フィルターは V にはないので何処からも持ってこれない！
    - $\mathbb{B}$ が極小元を持つ $\iff$ $(V, \mathbb{B})$-生成フィルターが V に存在.
  - ⋆ より一般に，V が任意の生成フィルターを持ち得るのは，V 自身よりも「背が低い」モデルに対してだけ！

生成多元宇宙の定式化問題

- 生成多元宇宙の扱いは，集合論の地質学に比べ困難が多い
- そもそも「宇宙」として何を扱うか？
  1. 可算推移的モデル（c.t.m.）
  2. V そのもの（真のクラス）
- 既存の手法では 1に類する手法が多い

! V 上の非自明な生成フィルターは V にはないので何処からも持ってこれない！

- $\mathbb{B}$ が極小元を持つ $\iff$ $(V, \mathbb{B})$-生成フィルターが V に存在．

⋆ より一般に，V が任意の生成フィルターを持ち得るのは，V 自身よりも「背が低い」モデルに対してだけ！

⋯ わかる人向け：$\kappa \in M$ を M の基数とすると，$(M, \mathrm{Col}(\omega, \kappa))$-生成フィルター G は V でも κ を可算に潰してしまう．

可算推移的モデル

- 次の理論 ZFC$[M]$ は ZFC の保存拡大になっている：

  二項述語 $\in$ および定数 M を持つ言語で，ZFC の公理と「M は可算で推移的」＋任意の ZFC の公理 φ について $M \models \varphi$ を付け加えたもの

- メタ的には M は ZFC のモデルだが，不完全性定理より **V の中では** M が ZFC のモデルになることはわからない．
- この「トイモデル」M に対する生成フィルターは大外の宇宙 V で（複数）取る事ができる．
- 衒学的（ペダンチック）な注意：通常 ZFC の無矛盾性は仮定するが，それでも ZFC + “本物の可算推移的モデルの存在” は ZFC + Con(ZFC)（= ZFC のモデルの存在）よりも強い！

可算推移的モデルに対する生成フィルターの存在

Lemma 14

M を可算推移的モデル，$\mathbb{P} \in M$ を強制概念とする時，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対し $p \in G$ なる $(M, \mathbb{P})$-生成フィルター G が存在.

Proof.

M は可算なので，M に属する $\mathbb{P}$ の稠密開集合を（V において）$\{ D_n \mid n < \omega \}$ と列挙出来る．そこで，$\langle p_n \in \mathbb{P} \mid n < \omega \rangle$ を次を満たすよう取る：

$$p_{n+1} \leq p_n \leq p_0 := p, p_{n+1} \in D_n$$

そこで G を p_n たちが生成するフィルターとする：$\{ q \in \mathbb{P} \mid \exists n \, p_n \leq q \}$．すると取り方から G はフィルターであり，定義より $p_{n+1} \leq D_n \cap G$ となるので，G は $(M, \mathbb{P})$-生成的. □

- 実は上の補題は ZF 上で従属選択公理と同値

可算推移的モデルを使った多宇宙の定式化

Notation 1

以下，可算推移的モデル M を一つ固定する．

Definition 15 (Woodin [14])

M の生成する Woodin 多宇宙 $\mathcal{M}_W(M)$ は，次で定義される：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^W_0(M) &:= \{\, M \,\}, \\
\mathcal{M}^W_{n+1}(M) &:= \{\, U[G] \mid U \in \mathcal{M}_n, G : \text{generic over } U \,\} \\
&\quad\ \cup \ \{\, W \mid W \subseteq U \in \mathcal{M}_n : \text{ground} \,\}, \\
\mathcal{M}^W(M) &:= \bigcup_n \mathcal{M}_n
\end{aligned}$$

- 言ってしまえば，M から到達できる基礎モデルとその上の生成フィルターを全部突っ込んだもの．

Woodin 多元宇宙の特徴：Non-amalgamation

- Woodin 多元宇宙では**上方有向性が成り立たない**！

Theorem 16 (Proof due to Woodin, but Folklore?)

任意の *c.t.m.* M に対し，M 上の生成フィルター c_1, c_2 で $M[c_1]$ と $M[c_2]$ が共通の生成拡大を持たないものが存在する．

- ポイント：$\alpha := M \cap \mathrm{On}$ は可算極限順序数でとなり，これは生成拡大・基礎を取る操作で不変！
  - 特に M の任意の生成拡大 $M[G]$ について $\alpha \notin M[G]$！

⋆ α をコードする $X = \{ k_0 < k_1 < \dots \} \subseteq \omega$ の情報を c_1 に「雑に」埋め込み，c_2 にその「読み方」の情報を持たせる．

⇝ $c_1, c_2 \in N$ なる $N \supseteq M$ があれば，$\alpha \in N$ となるので，そのような N は生成拡大になり得ない！

Non-amalgamation in Woodin multiverse

1. 強制法 $\mathbb{C} := \langle {}^{<\omega}\omega, \supseteq \rangle \in M$ を考える．**可算**推移的モデル M に属する $\mathbb{C}$ の稠密開集合は $\{ D_n \mid n < \omega \}$ と列挙出来る．
2. $\langle p_n, q_n \mid n < \omega \rangle$ を次を満たすように構成していく：

$$\begin{array}{ccc} & p_0 \in D_0 & p_1 \in D_1 \\ \underbrace{(k_0 \cdots\cdots)} & \underbrace{(0 \cdots\cdots 0 \quad k_1 \cdots\cdots)} & \underbrace{(0 \cdots 0 \quad k_2 \cdots\cdots} \\ (\ell_0 \cdots\cdots\cdots\cdots) & (\ell_1 \cdots\cdots\cdots\cdots) & (\ell_2 \cdots\cdots \\ & q_0 \in D_0 & q_1 \in D_1 \end{array}$$

3. c_1, c_2 をそれぞれ $\{ p_n \mid n < \omega \}$, $\{ q_n \mid n < \omega \}$ の生成するフィルターとすれば，c_1, c_2 は共に M 上生成的．

$\rightsquigarrow$ $c_1, c_2 \in N$ なる $N \supseteq M$ があれば，順番に $k_0, \ell_0, k_1, \ell_1, \ldots$ を復元していくことで，X の情報と α を復元出来る！

Steel 多元宇宙

- 上方有向性が成り立ような定式化はあるか？

Definition 17 (Steel [11])

Steel 生成多元宇宙 $\mathcal{M}_S(M)$ は次で定義される：$\gamma := M \cap \mathrm{On}$ と置き，G を M 上の $\mathrm{Col}(\gamma, {<}\omega)$-生成フィルター，$G_\alpha := G \cap \mathrm{Col}(\alpha, < \omega)$ とする.

$$\mathcal{M}_S := \{\, N \mid \exists \alpha < \gamma\ N : \text{a ground of } M[G_\alpha] \,\},$$

但し，$\mathrm{Col}(\alpha, {<}\omega)$ は **α を ω_1 に潰す Levy 崩壊**である：

$$p \in \mathrm{Col}(\alpha, {<}\omega) \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} p : \alpha \times \omega \rightharpoonup \alpha, |p| < \aleph_0 \\ \forall (\beta, n) \in \mathrm{dom}(p)\ p(\beta, n) \in \beta \end{cases}$$

$$p \leq q \overset{\text{def}}{\iff} p \supseteq q$$

Steel 多元宇宙が多元宇宙である理由

- Steel 多元宇宙は**全ての生成拡大で閉じてはいない**.
  - 上の c_1, c_2 の少なくとも一方は Steel 多元宇宙に含まれない.
- Levy 崩壊の一般論より次の弱い形の閉包性が成り立つ：

Fact 18

任意の $N \in \mathcal{M}_S(M)$ と強制概念 $\mathbb{P} \in N$ および強制条件 $p \in \mathbb{P}$ について，$(N, \mathbb{P})$-生成フィルター G で $p \in G$ かつ $N[G] \in \mathcal{M}_S(M)$ を満すものが取れる.

- 強制法定理より，一階の論理式で書ける命題については $V[G] \models \varphi$ の「証拠」となるような $p \in G$ が取れるので，多くの場合これで十分.
  - ⋆ Woodin の構成の「二つあると高さが変わる」という性質は，多元宇宙の内側では一階で書けない！

Steel 多元宇宙における上方有向性

- Steel 多元宇宙では上方有向性が成り立つ！

Fact 19

$\alpha < \beta \leq \gamma$ に対し， $V[G_\alpha][G \restriction [\alpha, \beta)] = V[G_\gamma]$.

Corollary 20

Steel 多元宇宙は上方有向性を満たす：任意の $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_S(M)$ に対し，共通の生成拡大 $N_1, N_2 \subseteq N \in \mathcal{M}_S(M)$ が存在する.

Proof.

$\mathcal{M}_S$ の定義から， $N_i[H_i] = M[G_{\alpha_i}]$ となるような $\alpha_1, \alpha_2 < \gamma$ が存在し， $\alpha_1 \leq \alpha_2$ であるとしてよい．この時，上の事実から $V[G_{\alpha_1}][G \restriction [\alpha_1, \alpha_2)] = V[G_{\alpha_2}]$ となる．生成拡大の生成拡大は生成拡大だから， $V[G_{\alpha_2}] \in \mathcal{M}$ が N_1, N_2 の共通の生成拡大. □

可算推移的モデルの多元宇宙：まとめ

- 大別して二つの種類：Woodin 多元宇宙と Steel 流
- Woodin 多元宇宙は V にある全ての M の生成拡大を含むが，上方有向性が成り立たない
  - c.t.m. M に対し，生成フィルター c_1, c_2 で二つ合わせると M の高さを変えてしまうものが取れる．
- Steel 流では，**Levy 崩壊**を使って素性の良い生成フィルターだけを選んでいる．
  - 各 $\mathbb{P}$ に対して，最低一つの $\mathbb{P}$-生成拡大を持つが，V にある全ての生成拡大を含む訳ではない．
  - 一方，Steel 多宇宙では上方有向性が成り立つ！

Table Of Contents

c.t.m. ベースの手法への不満と真のクラスを扱う困難性

- 本物の V を扱っていない！
- ZFC$[M]$ は ZFC の保存拡大だが，そのモデルは必然的に**非標準自然数を含む！**
    - 保存拡大なので ZFC の言語に関する帰結は増えないが，それでも ZFC のモデルの研究と言って良いのだろうか？

$\leadsto$ 真のクラスから成る多元宇宙を考えてみては？

! V の多元宇宙を考えようとしても，V 上の生成フィルターは V には存在しない！

- こうした困難があるため，真クラスから成る生成多元宇宙はこれまであまり研究されてこなかった．

- Hamkins–Seabold [9] の **Boole 超冪**による**自然主義的な強制法の説明**を援用出来ないか？

代替案：Hamkins による強制法の自然主義的説明

Theorem 21 (Hamkins–Seabold [9])

任意の完備 *Boole* 代数 $\mathbb{B}$ と $\mathbb{B}$ 上の超フィルター $\mathcal{U}$ に対し，$V^{\mathbb{B}}$ 上の同値関係 $\sim_{\mathcal{U}}$ 及び $\in_{\mathcal{U}}$ を次で定める：

$$\dot{x} \sim_{\mathcal{U}} \dot{y} \overset{\text{def}}{\iff} [\![\dot{x} = \dot{y}]\!] \in \mathcal{U} \qquad \dot{x} \in_{\mathcal{U}} \dot{y} \overset{\text{def}}{\iff} [\![\dot{x} \in \dot{y}]\!] \in \mathcal{U}.$$

ここで $\check{V}_{\mathcal{U}}^{(\mathbb{B})} := \{\, [\dot{x}] \in V^{\mathbb{B}}/{\sim} \mid [\![\dot{x} \in \check{V}]\!] \,\}$ と置くと，次が成立：

1. $j(x) := [\check{x}]$ により $j : V \to \check{V}_{\mathcal{U}}$ を定めると j は初等写像：任意の $a_1, \ldots, a_n \in V$ および一階論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，
$$V \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \check{V}_{\mathcal{U}} \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n)).$$
2. $V_{\mathcal{U}}^{\mathbb{B}} \models$ "ZFC $+ \exists \bar{G} : (\check{V}_{\mathcal{U}}, j(\mathbb{B}))$-generic $V_{\mathcal{U}}^{\mathbb{B}} = \check{V}_{\mathcal{U}}[\bar{G}]$"

$\check{V}_{\mathcal{U}}$ を V の $\mathcal{U}$ による ***Boole* 超冪**と呼ぶ.

自然主義的強制法とは何なのか？

Fact 22 (Boolean Łoś Theorem)

$$M^{\mathbb{B}}/\mathcal{U} \models \varphi(\dot{x}) \iff [\![\varphi(\dot{x})]\!] \in \mathcal{U}.$$

- ⋆ V の生成フィルターは存在しなくても，非自明な初等拡大を通して $V \prec \bar{V} \subseteq \bar{V}[\bar{G}]$ となるような $\bar{G}$ は V で取れる！
- $\bar{V}$ や $\bar{V}[\bar{G}]$ は一般に整礎的とは限らず，推移的モデルとして取れるとは限らない.
  - しかし $\bar{V}[\bar{G}]$ は $\bar{V}$ の中で推移的に見えていて，しかも自分を $\bar{V}$ の生成拡大だと思い込んでいる！
- Hamkins–Seabold [9] では元々 $\bar{V}$ と $\bar{V}[\bar{G}]$ が整礎的な場合を考えることで，強制法の理論と巨大基数の理論の統一的な記述を与えようとしていた.

$\rightsquigarrow$ 我々は**非整礎的でも良い**ので，V そのものではなく，代わりにその**非自明な初等拡大の生成拡大**を考えたい.

Boole 超冪を使った生成多元宇宙の定式化に向けて

Definition 23 (I.)

二つの（非整礎でもよい）宇宙 N, M が与えられた時，M が N の**非整礎生成拡大**である，或いは N が M の**非整礎基礎モデル**であるとは，ある初等埋め込み $j : N \prec \bar{N}$ と $\bar{G}$ があって，
$M \models \mathrm{ZFC} +$ “$M = \bar{N}[\bar{G}]$” となる事を言う．

- Boole 超冪の任意有限回の反復として定式化したらどうか？
- ! 一般に真のクラスに対する真理述語は定義不能！（Tarski）
  - ある n に対して「N_1 は V の基礎モデルで，$N_1 \to \cdots \to N_n$ は非整礎生成拡大と非整礎基礎モデルを取るパス」は ZFC で定式化できるが……
  - n を固定せず「$N_1 \to \cdots \to N_n$ は任意有限回の非整礎生成多元宇宙のパス」は，一様に定義出来るかどうかはわからない！
- HOD や $\mathbb{M}$ の任意回反復が可能なモデルは存在するが，更に一般の相対化を反復するのはもっと難しそう……

当座の打開策：DDG を組み込む

- Recall: DDG より生成多元宇宙の任意の二宇宙は，一方の基礎モデルを取ってから生成拡大を取ることで往き来出来る．
- この事実を念頭に，次のようにみるのはどうか？

Definition 24 (I.)

非整礎生成多元宇宙 $\mathcal{M}^*$ を次で定義する：

$$(W, \mathbb{B}, \mathcal{U}) \in \mathcal{M}^*$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} (\mathbb{B}: \text{完備 Boole 代数})^M, \mathcal{U} \text{ は } \mathbb{B} \text{ 上の超フィルター}$$

- 反復強制法 $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ を考えれば，V の知る超フィルターによる Boole 超冪で閉じているという意味で，非整礎生成拡大について閉じている．
- $(W, \mathcal{U}), (U, \mathcal{D}) \in \mathcal{M}^*$ とすれば，DDG より必ず共通の基礎モデル $N \subseteq W, U$ が取れ，$(N, \{\mathbb{1}\}) \in \mathcal{M}^*$ を介して有限のパス（長さ 2 のパス）で繋がれていることもわかる．

問題：基礎モデルを制限するしかない

- 問題は「基礎モデルで閉じている」の部分！

⇝ V が非自明な基礎を持ち $\bar{V}$ が非整礎な場合，$\bar{V}$ は非標準的な元 $r \in \bar{V} \setminus j``V$ を持つ．

⇝ 対応する $W_r^{\bar{V}}$ は V の知らない，非自明な基礎モデルになる！

  - それでも，V 上の一階論理式で書ける性質については，初等性から標準パラメータ $r \in V$ で $W_r \models \varphi$ となるものが取れる

  ⇝ 「標準的な」基礎モデルだけ考えるので十分？

Definition 25 (I.)

$\bar{M} = M^{\mathbb{B}}/\mathcal{U}$ を非整礎宇宙とする．$\bar{M}$ の基礎モデル $\bar{N}$ が**標準基礎モデル** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $r \in M$ と $\mathbb{C} \in W_r$ があって，$\bar{M} \models$ "$W_{j(r)} \nearrow_{j(\mathbb{C})} \bar{N}$"．

⋆ $\bar{M}$ で見たときに基礎モデル $\bar{W}$ は $\check{V}_{\mathcal{U}}$ と共通の基礎を持つ．

- その基礎が V のパラメータで定義でき，V の知っている強制で $\bar{W}$ に到達出来るときに標準基礎と呼ぶ．

標準基礎モデルで閉じていること

- 下図のような $r \in M$, 完備 Boole 代数 $\mathbb{D} \in W_r$ を取る：

$$
\begin{tikzcd}
 & & \bar{M}[\bar{G}] & \\
M \arrow[r, "\prec", "j_{\mathcal{U}}"'] & \bar{M} \arrow[ur, hook, "\bar{G} \subseteq j(\mathbb{B})"] & & \bar{N} \arrow[ul, hook] \\
W_r = W \arrow[u, hook, "H \subseteq \mathbb{C}"] \arrow[rr, "\prec", "j_{\mathcal{U}} \upharpoonright W"'] & & \bar{W}_{j(r)} \arrow[ul, hook, "j(H) \subseteq j(\mathbb{C})"'] \arrow[ur, hook, "j(\mathbb{D}) \cap (j(H) * \bar{G}) \subseteq j(\mathbb{D})"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $\mathcal{D} := \mathbb{D} \cap (H * \mathcal{U})$, $N := (W_r, \mathbb{D}, \mathcal{D})$ とおけば良さそう.

$N \prec \bar{N}$ となっていること

1. 定義から N の元は $\dot{x} \in W^{\mathbb{D}}$ があって $[\dot{x}]_{\mathcal{D}}$ の形をしている.
2. このとき $k : N \to \bar{N}$ を $k([\dot{x}]_{\mathcal{D}}) := j(\dot{x})^{\bar{D}}$ と置く．但し $\bar{D} := j(\mathbb{D}) \cap (j(H) * \bar{G})$.

Remark 3

$b \in \mathcal{U} \implies j(b) \in [\dot{G}]_{\mathcal{U}} = \bar{G}$. 特に $j``\mathcal{U} \subset \bar{G}$.

3. よって k は well-defined で，Boolean Łoś より初等写像！

非整礎生成多元宇宙

Theorem 26 (I.)

$\mathcal{M}^*$ は一般化された生成多元宇宙の公理を満たす．即ち：

1. 任意の $M \in \mathcal{M}^*$ と $\mathbb{P} \in M$ に対し，$(M, \mathbb{P})$-生成拡大 $N \in \mathcal{M}^*$ が存在する．特に，V の知っている全ての非整礎生成拡大について閉じている．
2. $\mathcal{M}^*$ は次の意味で標準基礎モデルについて閉じている：任意の $M \in \mathcal{M}^*$ と M の任意の標準基礎モデル $\bar{N}$ に対し，$N \in \mathcal{M}^*$ で $N \prec \bar{N}$ となるものが存在する．
3. $\mathcal{M}^*$ に属する任意の宇宙は基礎モデルの生成拡大を取ることで往き来出来る．

- ⋆ 初等埋め込みの差を無視して，標準部分については生成多元宇宙のように振る舞うように見える．
- 例えば「$\psi(x)$ を満たす基礎モデル M が存在する」は一階論理式で表現出来るので，標準基礎だけ考えていれば十分？

$\mathcal{M}^*$ における上方有向性

- $\mathcal{M}^*$ では上方有向性が成立する！

Fact 27 (Hamkins–Seabold [9])

完備 *Boole* 代数 $\mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1$ 上の超フィルター $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ に対し，次が可換：

$$
\begin{tikzcd}
 & \bar{V}_0 \arrow[r, hook, dashed] & \bar{V}_0[\bar{G}_0] \arrow[r, "\prec"] & V^*[G_0^*] \arrow[dr, hook, dashed] & \\
V \arrow[ur, "\prec"] \arrow[dr, "\prec"'] & & & & V^*[G_0^* \times G_1^*] \\
 & \bar{V}_1 \arrow[r, hook, dashed] & \bar{V}_1[\bar{G}_1] \arrow[r, "\prec"'] & V^*[G_1^*] \arrow[ur, hook, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

Corollary 28 (I., というのもおこがましいが……)

$\mathcal{M}^*$ では上方有向性が成り立つ．即ち，$M, N \in \mathcal{M}^*$ に対し，M, N のある初等拡大の共通の生成拡大 $U \in \mathcal{M}^*$ が存在する．

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい．

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい．
  - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う．

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい.
    - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う.
- そのまま「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」として定式化するのは，任意回のクラス相対化が必要になり難しい.

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい.
  - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う.
- そのまま「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」として定式化するのは，任意回のクラス相対化が必要になり難しい.

⋆ DDG を組み込んで，基礎の Boole 超冪全体 $\mathcal{M}^*$ を考たら？

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい.
  - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う.
- そのまま「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」として定式化するのは，任意回のクラス相対化が必要になり難しい.

⋆ DDG を組み込んで，基礎の Boole 超冪全体 $\mathcal{M}^*$ を考たら？
  - 「標準基礎モデル」で閉じているくらいの事は言える.

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい．
    - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う．
- そのまま「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」として定式化するのは，任意回のクラス相対化が必要になり難しい．

⋆ DDG を組み込んで，基礎の Boole 超冪全体 $\mathcal{M}^*$ を考たら？
    - 「標準基礎モデル」で閉じているくらいの事は言える．
- $\mathcal{M}^*$ で上方有向性が成り立つ！（S4.2 フレームにはなる）

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい．
  - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う．
- そのまま「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」として定式化するのは，任意回のクラス相対化が必要になり難しい．

⋆ DDG を組み込んで，基礎の Boole 超冪全体 $\mathcal{M}^*$ を考たら？
  - 「標準基礎モデル」で閉じているくらいの事は言える．
- $\mathcal{M}^*$ で上方有向性が成り立つ！（S4.2 フレームにはなる）
- 整礎 Boole 超冪は巨大基数と関連し，それも取り込んだ多元宇宙になっている（Hamkins らのモチベーションはこれ）

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい．
    - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う．
- そのまま「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」として定式化するのは，任意回のクラス相対化が必要になり難しい．

⋆ DDG を組み込んで，基礎の Boole 超冪全体 $\mathcal{M}^*$ を考たら？
    - 「標準基礎モデル」で閉じているくらいの事は言える．

- $\mathcal{M}^*$ で上方有向性が成り立つ！（S4.2 フレームにはなる）
- 整礎 Boole 超冪は巨大基数と関連し，それも取り込んだ多元宇宙になっている（Hamkins らのモチベーションはこれ）

? 「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」を扱う方法はあるか？ それを可能たらしめるクラス強制法はないか？

まとめと Open Problems

- Hamkins–Seabold の Boole 超冪を使って，真のクラスから成る生成多元宇宙を定式化したい．
    - 一般的に非整礎，初等拡大まで込めて生成拡大だと思う．
- そのまま「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」として定式化するのは，任意回のクラス相対化が必要になり難しい．

⋆ DDG を組み込んで，基礎の Boole 超冪全体 $\mathcal{M}^*$ を考えたら？

- 「標準基礎モデル」で閉じているくらいの事は言える．

- $\mathcal{M}^*$ で上方有向性が成り立つ！（S4.2 フレームにはなる）
- 整礎 Boole 超冪は巨大基数と関連し，それも取り込んだ多元宇宙になっている（Hamkins らのモチベーションはこれ）

? 「Boole 超冪の生成拡大と基礎の任意有限列」を扱う方法はあるか？ それを可能たらしめるクラス強制法はないか？

? クラスの生成多元宇宙で，上方有向性がないものはあるか？

Table Of Contents

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
  - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
  - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
    - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク．
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析．
  - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心．

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

$\rightsquigarrow$ 私のアイデア：非整礎 Boole 超冪を使うとどうか？

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
  - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

$\rightsquigarrow$ 私のアイデア：非整礎 Boole 超冪を使うとどうか？

- 初等埋め込みまで込めると生成拡大が存在するように見える

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
    - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

$\leadsto$ 私のアイデア：非整礎 Boole 超冪を使うとどうか？
- 初等埋め込みまで込めると生成拡大が存在するように見える
- 任意有限回の相対化は厳しいので，DDG を組み込む定式化

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
    - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

⇝ 私のアイデア：非整礎 Boole 超冪を使うとどうか？
- 初等埋め込みまで込めると生成拡大が存在するように見える
- 任意有限回の相対化は厳しいので，DDG を組み込む定式化
- それでも標準基礎については閉じてくれる

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
  - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

$\rightsquigarrow$ 私のアイデア：非整礎 Boole 超冪を使うとどうか？

  - 初等埋め込みまで込めると生成拡大が存在するように見える
  - 任意有限回の相対化は厳しいので，DDG を組み込む定式化
  - それでも標準基礎については閉じてくれる
  - 上方有向性が成り立つ.（少なくとも S4.2 フレームになる）

まとめ

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
  - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

⇝ 私のアイデア：非整礎 Boole 超冪を使うとどうか？
  - 初等埋め込みまで込めると生成拡大が存在するように見える
  - 任意有限回の相対化は厳しいので，DDG を組み込む定式化
  - それでも標準基礎については閉じてくれる
  - 上方有向性が成り立つ.（少なくとも S4.2 フレームになる）

? 他のクラス生成多元宇宙の定式化は？ 上方有向性を破れる？

参考文献 I

[1] Lev Bukovský, **Characterization of generic extensions of models of set theory**, Fundamenta Mathematicae 83 (1973), pp. 35–46.

[2] Sy David Friedman, Sakaé Fuchino, and Hiroshi Sakai, **On the set-generic multiverse**, version 0, July 6, 2016, arXiv: 1607.01625 [math.LO].

[3] Gunter Fuchs, Joel David Hamkins, and Jonas Reitz, **Set-theoretic geology**, version 0, Nov. 18, 2014, arXiv: 1107.4776 [math.LO], (visited on 07/31/2017).

[4] Victoria Gitman and Joel David Hamkins, **A natural model of the multiverse axioms**, version 0, Apr. 22, 2011, arXiv: 1104.4450v1 [math.LO].

[5] Joel David Hamkins, **Destruction or preservation as you like it**, version 0, Annals of Pure and Applied Logic 91 (July 3, 2016), pp. 191–229, DOI: 10.1016/S0168-0072(97)00044-4, arXiv: 1607.00683 [math.LO].

参考文献 II

[6] Joel David Hamkins, **The ground axiom**, version 0, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report 55 (July 4, 2016), pp. 3160–3162, arXiv: 1607.00723 [math.LO].

[7] ______ , **The set-theoretic multiverse**, version 0, Review of Symbolic Logic 5:416-449 (2012) (Aug. 22, 2011), DOI: 10.1017/S1755020311000359, arXiv: 1108.4223v1 [math.LO].

[8] ______ , **Upward closure and amalgamation in the generic multiverse of a countable model of set theory**, version 0, Nov. 3, 2015, arXiv: 1511.01074 [math.LO], (visited on 11/25/2017).

[9] Joel David Hamkins and Daniel Evan Seabold, **Well-founded boolean ultrapowers as large cardinal embeddings**, version 0, June 26, 2012, arXiv: 1206.6075 [math.LO], (visited on 06/14/2016).

[10] Richard Laver, **Certain very large cardinals are not created in small forcing extensions**, Annals of Pure and Applied Logic 149.**1** (2007), pp. 1–6, ISSN: 0168-0072, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.apal.2007.07.002, URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007207000607.

参考文献 III

[11] John R. Steel, **Gödel's program**, Interpreting Gödel: Critical Essays, ed. by Juliette Kennedy, Cambridge University Press, 2014, pp. 153–179, ISBN: 978-1107002661.

[12] Toshimichi Usuba, **The downward directed grounds hypothesis and very large cardinals**, version 0, July 17, 2017, arXiv: 1707.05132 [math.LO].

[13] Jouko Väänänen, **Multiverse set theory and absolutely undecidable propositions**, Interpreting Gödel: Critical Essays, ed. by Juliette Kennedy, Cambridge University Press, 2014, pp. 180–208, ISBN: 978-1107002661.

[14] W. Hugh Woodin, **The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω conjecture**, Set theory, arithmetic, and foundations of mathematics: theorems, philosophies 36 (2011), pp. 13–42.

[15] 石井大海, **集合論の地質学 1：概観と基礎モデルの定義可能性**, 2017, URL: http://konn-san.com/math/geology-ground-definability.html (visited on 11/11/2017).

参考文献 IV

[16] 石井大海, **集合論の地質学 3：Bukovský の定理——強制拡大の特徴付け**, 2017, URL: https://konn-san.com/math/geology-bukovsky-theorem.html (visited on 11/20/2018).

[17] ——, **集合論の地質学 4：下方有向性原理の証明**, 2017, URL: https://konn-san.com/math/geology-proof-of-ddg.html (visited on 11/20/2018).

[18] 佐野勝彦 et al., **数学における証明と真理: 様相論理と数学基礎論**, ed. by 菊池誠, 共立出版, Mar. 25, 2016, ISBN: 978-4-320-11148-6.

御清聴
ありがとう
ございました

Any Questions?

- 生成多元宇宙：強制法の織り成すネットワーク.
- 集合論の地質学：生成多元宇宙のうち宇宙の下部構造を分析.
  - 集合論の地質学の基本原理 sDDG は，生成多元宇宙全体の構造について多くを教えてくれる！
- 多元宇宙の定式化は，可算推移的モデルから成る物が中心.

! 真のクラスを扱う場合，任意の強制概念に対する生成フィルターは存在しない！

$\rightsquigarrow$ 私のアイデア：非整礎 Boole 超冪を使うとどうか？

  - 初等埋め込みまで込めると生成拡大が存在するように見える
  - 任意有限回の相対化は厳しいので，DDG を組み込む定式化
  - それでも標準基礎については閉じてくれる
  - 上方有向性が成り立つ.（少なくとも S4.2 フレームになる）

? 他のクラス生成多元宇宙の定式化は？ 上方有向性を破れる？